UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00467320 8

F. Purnell White
April 1922.

C. BURALI-FORTI E R. MARCOLONGO

ELEMENTI

DI

CALCOLO VETTORIALE

CON NUMEROSE APPLICAZIONI ALLA GEOMETRIA
ALLA MECCANICA E ALLA FISICA-MATEMATICA

SECONDA EDIZIONE RIORDINATA E AMPLIATA

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

LIBRARY
AUG 18 1972
UNIVERSITY OF TORONTO

L' EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

QA
261
B86
1921

PREFAZIONE

(ALLA PRIMA EDIZIONE)

Nella prima parte del libro che presentiamo al pubblico matematico, esponiamo sistematicamente, e sotto forma *assoluta* o *autonoma*, i fondamenti del calcolo vettoriale tra i soli enti, *numeri reali, punti, vettori, formazione di prima specie di Grassmann* (*o baricentri di Möbius*), indicando le immediate applicazioni a questioni geometriche ben note, e cercando, specialmente, di far vedere come l'uso opportuno di vettori e componenti vettoriali, presenti la Geometria analitica sotto forma geometrica assoluta ed elimini quell'ordinario algoritmo indiretto che, nato con le coordinate, deve necessariamente sparire appena gli enti geometrici possano essere considerati liberi dal sistema fisso di riferimento.

Nella seconda parte abbiamo applicato il sistema vettoriale, che possiamo chiamare *minimo*, sviluppando alcune questioni di geometria differenziale, di meccanica e di fisica matematica, che abbiamo scelte tra quelle ben note, appunto per mostrare l'enorme superiorità del calcolo vettoriale assoluto sugli antichi e indiretti metodi delle coordinate.

Risulta che il sistema vettoriale minimo da noi sviluppato ha un largo campo di applicazioni geometriche, fisiche e meccaniche. Esso non è certamente sufficiente per altre questioni e deve essere completato con lo studio di enti geometrici o di numeri funzioni di un punto, con le derivate di tali enti rispetto al punto del quale sono funzioni [1] e con le formazioni geometriche di seconda e terza specie di GRASSMANN.

Sotto gli aspetti ora indicati il nostro libro è il primo trattato italiano di calcolo vettoriale. Esso differisce profondamente, in quanto a metodo e a notazioni, da tutti i trattati anteriori pubblicati in questi ultimi anni, specialmente in Germania [2]. Ne differisce per il metodo, perchè noi intendiamo operare in modo assoluto sugli enti geometrici; mentre ordinariamente i vettori e le loro operazioni compariscono come tachigrafi delle coordinate. Ne differisce per le notazioni, perchè quelle razionali da noi seguite sono conformi, nella loro quasi totalità, alle notazioni proposte dai fondatori del calcolo vettoriale. Per la genesi e la storia delle nostre notazioni, che con vero piacere vediamo già adottate in Italia da vari colleghi nel loro insegnamento, rimandiamo il lettore alle note in fine del libro o a quelle,

[1] Cfr. le nostre *Omografie vettoriali* di prossima pubblicazione (G. B. Petrini. Torino).

[2] BUCHERER: *Elemente der Vektoranalysis*. Leipzig, 2 Auflage, 1905.
GANS: *Einführung in die Vektoranalysis*. Leipzig, 1905.
JAHNKE: *Vorlesungen ü. d. Vektorenrechnung*. Leipzig, 1905.
VALENTINER: *Vektoranalysis* (Sammlung Göschen). Leipzig, 1907.

più estese, da noi pubblicate nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo [1].

La conoscenza dei metodi vettoriali si impone oramai non solamente al fisico ed all'elettrotecnico, ma anche al cultore di matematiche pure. Possa questo libro, che viene alla luce nell'anno in cui la Germania festeggia il primo centenario della nascita di GRASSMANN, contribuire alla diffusione e alla conoscenza dei metodi del grande matematico e per le quali noi, con fede e con costanza lavoriamo da molti anni; possa coronare l'opera così genialmente iniziata presso di noi dal PEANO!

C. BURALI-FORTI (Torino)
R. MARCOLONGO (Napoli)

[1] *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo: Nota 1ª, t. XXIII, pp. 324-328 (1907); Nota 2ª, t. XXIV, pp. 65-80; Nota 3ª, ibidem, pp. 318-332 (1907); Nota 4ª, t. XXV, pp. 352-375; Nota 5ª, t. XXVI, pp. 369-377 (1908). — *Notations rationnelles pour le système vectoriel minimum.* Turin, V. Bona, 1908.

PREFAZIONE

(ALLA SECONDA EDIZIONE)

La *Bibliografia* (relativa alle *nuove notazioni e omografie*, pp. 245-250) indica chiaramente al lettore quale grande sviluppo hanno avuto i metodi vettoriali, da noi proposti, dopo la pubblicazione della 1ª edizione di questi Elementi; l'importanza di questi metodi è stabilita dal fatto che essi sono stati adottati in quasi tutte le università italiane; importanza che i pochi avversari sistematici non diminuiscono, anzi accrescono. Ci basterà, dunque, accennare alle numerose aggiunte e perfezionamenti introdotti nella presente 2ª edizione [1].

L'ordine generale è rimasto pressochè invariato; anzi l'unico cambiamento di ordine è questo: il prodotto *interno* ($\times$) precede quello *vettoriale* ($\backslash$), i *baricentri* (o formazioni geometriche di prima specie, secondo PEANO, $\mathbf{F}_1$) seguono immediatamente il prodotto vettoriale, e la condizione di *identità* di due $\mathbf{F}_1$ (definite, come i *vettori*, no-

[1] Nella quale abbiamo riportato anche tutto quanto era stato aggiunto nella traduzione francese (Hermann, Paris, 1910) ora esaurita.

minalmente e non *per astrazione* [1]) viene ottenuta, in modo semplicissimo, mediante i due prodotti interno e vettoriale. Questo cambiamento di ordine ci ha permesso di semplificare notevolmente le dimostrazioni delle proprietà fondamentali dei prodotti interno e vettoriale e delle $\mathbf{F}_1$.

Nella Parte I le principali aggiunte e trasformazioni sono le seguenti. Alcune identità vettoriali [Cap. II, n. 4, *c*] nello spazio e le corrispondenti nel piano [Cap. IV, n. 1, *d*]. Il *gradiente* di un *numero* e la *rotazione* (o *rotazionale*) di un *vettore*, funzioni del punto P, sono rimasti definiti, rispettivamente, mediante *uno*, o *due* spostamenti arbitrari di P; e mentre la *divergenza* di un numero era definita ricorrendo al gradiente e alla rotazione, ora è definita, con procedimento analogo, mediante *tre* spostamenti arbitrari del punto P; il che, oltre dare uniformità di definizione e mettere in piena luce il significato fisico della divergenza, permette di escludere, anche dalle dimostrazioni, le coordinate cartesiane. Come Appendice della Parte I, abbiamo riportato, dalla edizione francese, quanto è fondamentale per le *formazioni geometriche* generali di Grassmann-Peano [2]) e così la Parte I contiene, oltre al *sistema vettoriale minimo* [Cap. I-VI] quanto è fondamentale per il generale *Calcolo*

[1]) Definizione riconosciuta insufficiente, o meglio erronea (cfr. *Logica Matematica*, Cap. IV, § 5, di C. Burali-Forti (Manuali Hoepli, 1919).

[2]) I *quaternioni* di Hamilton, già contenuti nella Appendice della edizione francese si trovano pure come Appendice alla fine del presente volume.

geometrico; ma nella Parte II facciamo uso soltanto del *sistema minimo* come nella 1ª edizione.

Nella Parte II vi sono le seguenti aggiunte. Cap. I: *Assintoti e piani assintotici* [n. 1]; *Eliche cilindriche* [n. 6]; *Linee di curvatura, geodetiche, assintotiche* sviluppandone le proprietà fondamentali [n. 7]; *Superficie rigate* [n. 9]; *Superficie di rotazione ed elicoidali* [n. 10]; *Punto funzione di tre variabili* [n. 11]; *Aree e volumi* [n. 12].

Ringraziamo vivamente il prof. T. Boggio per averci efficacemente aiutati nella correzione delle bozze e l'Editore che, nonostante i tempi difficili, ha posto ogni cura per la buona riuscita di questa seconda edizione.

Agosto 1920.

C. Burali-Forti (Torino)
R. Marcolongo (Napoli)

INDICE

Prefazione alla prima edizione . . . . . Pag. V
Prefazione alla seconda edizione . . . . . » IX
Indice . . . . . » XV

PARTE PRIMA

OPERAZIONI ED OPERATORI VETTORIALI

CAPITOLO I.

Somma e prodotto per un numero.

1. Vettori eguali . . . . . Pag. 3
2. Vettore nullo . . . . . » 6
3. Lunghezza, direzione, verso, modulo . . . . . » 6
4. Caratteristiche di un vettore; rappresentazione grafica . . . 7
5. Somma di un punto con un vettore . . . . . » 8
6. Somma di vettori . . . . . » 9
7. Prodotto di un vettore per un numero reale . . . . . » 11
8. Espressioni lineari di vettori . . . . . » 13
9. Punti di una retta, di un piano, dello spazio . . . . . » 15
10. Coordinate dei vettori . . . . . » 16
11. Coordinate cartesiane . . . . . » 16

CAPITOLO II.

Prodotto interno e vettoriale.

1. Angolo di due vettori . . . . . Pag. 21
2. Prodotto interno . . . . . » 22
3. Prodotto vettoriale . . . . . » 26
4. Relazioni tra prodotto interno e vettoriale . . . . . » 29
5. Proiezioni. Applicazioni alla trigonometria . . . . . » 36

6. Distanze, angoli, aree, volumi . . . . . Pag. 38
7. Coordinate cartesiane ortogonali . . . . . » 40

CAPITOLO III.

Calcolo baricentrico.

1. Definizione delle forme di prima specie, F_1; forme eguali; forma nulla . . . . . Pag. 45
2. Algoritmo delle F_1 . . . . . » 47
3. Massa e baricentro . . . . . » 48
4. Costruzioni grafiche . . . . . » 50
5. Alcune applicazioni alla Geometria elementare . . . . . » 52
6. Coordinate . . . . . » 54

CAPITOLO IV.

Rotazioni in un piano.

1. Rotazione di un angolo retto . . . . . Pag. 57
2. Complessi e loro algoritmo . . . . . » 60
3. Rotazioni in generale . . . . . » 63
4. Riduzione dei complessi ad esponenziali . . . . . » 64
5. Aree piane e distanze . . . . . » 65
6. Coordinate cartesiane e polari . . . . . » 70

CAPITOLO V.

Funzioni di numeri.

1. Limite . . . . . Pag. 73
2. Derivate . . . . . » 74
3. Vettori e loro derivate . . . . . » 75
4. Formula di Taylor . . . . . » 77
5. Integrali . . . . . » 78

CAPITOLO VI.

Funzioni di un punto.

1. Funzioni di un punto in generale . . . . . Pag. 81
2. Gradiente . . . . . » 81
3. Rotazione e divergenza . . . . . » 86
4. Prodotti degli operatori grad, div, rot . . . . . » 90
5. Alcune applicazioni geometriche del grad . . . . . » 91

APPENDICE ALLA PARTE PRIMA

Formazioni geometriche.

1. Forme eguali . . . . . Pag. 100
2. Forme nulle . . . . . » 101
3. Forme di quarta specie . . . . . » 101
4. Somma e prodotto per un numero. . . . . » 102
5. Prodotto alternato progressivo . . . . . » 102
6. Notazione effettiva. . . . . » 104
7. Interpretazione geometrica. . . . . » 104
8. Differenze caratteristiche tra il prodotto alternato e il prodotto algebrico . . . . . » 105
9. Bivettori e trivettori . . . . . » 106
10. Significato meccanico delle $\mathbf{F}_2$ . . . . . » 108
11. Operatore indice. . . . . » 109
12. Posizione delle $\mathbf{F}$ . . . . . » 111
13. Alcune identità tra $\mathbf{F}_1$ nello spazio e nel piano . . . . » 112
14. Prodotto alternato regressivo (o intersezioni) . . . . . » 113
15. Limite, derivate, integrali . . . . . » 115
16. Trasformazioni lineari . . . . . » 115

PARTE SECONDA

APPLICAZIONI DEL CALCOLO VETTORIALE ALLA GEOMETRIA ALLA MECCANICA E ALLA FISICA MATEMATICA

CAPITOLO I.

Applicazioni alla Geometria differenziale.

1. Retta tangente e piano osculatore. Assintoti, piani assintotici . . . . . Pag. 119
2. Arco, flessione, torsione, formule di Frenet . . . . . » 122
3. Sfera osculatrice, cerchio osculatore 129
4. Evolventi ed evolute . . . . . » 130
5. Linee piane . . . . . » 131
6. Eliche cilindriche 135
7. Punto funzione di due variabili 138

8. Inviluppi e traiettorie di un sistema ∞^1 di linee . . . . Pag. 146
9. Superfici rigate . . . . . » 151
10. Superfici di rotazione ed elicoidali . . . . . » 156
11. Punto funzione di tre variabili . . . . . » 158
12. Aree e volumi . . . . . » 159

CAPITOLO II.

Formule di calcolo integrale.

1. Teoremi sul gradiente e sulla divergenza . . . . . Pag. 161
2. Lemmi e teorema di Green. . . . . » 164
3. Il teorema di Stokes o della circuitazione . . . . . » 166
4. Teorema della variazione del flusso . . . . . » 170
5. Formule in coordinate cartesiane . . . . . » 171

CAPITOLO III.

Applicazioni alla Meccanica.

1. Velocità ed accelerazione di un punto . . . . . Pag. 173
2. Moto centrale . . . . . » 174
3. Formule fondamentali per la cinematica di un corpo rigido » 178
4. Moto di una figura piana nel proprio piano . . . . . » 181
5. Curve funicolari . . . . . » 185
6. Moto di un corpo rigido . . . . . » 187

CAPITOLO IV.

Applicazioni all'Idromeccanica.

1. Equazioni di equilibrio e del moto . . . . . Pag. 191
2. Moto vorticoso. Potenziale di velocità . . . . . » 194

CAPITOLO V.

Applicazioni alla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.

1. Formule preliminari . . . . . Pag. 199
2. Formule del Betti per la divergenza e la rotazione dello spostamento . . . . . » 201
3. Formule del Somigliana . . . . . » 204

CAPITOLO VI.

Applicazioni all'Elettrodinamica.

1. Potenziali ritardati . . . . . Pag. 207
2. Le equazioni di Maxwell-Hertz dell'elettrodinamica dei corpi in riposo . . . . . » 211
3. Vettore radiante e teorema di Poynting . . . . . » 214
4. Integrali delle equazioni di Maxwell-Hertz . . . . . » 215
5. Le equazioni di Lorentz . . . . . » 217

APPENDICE ALLA PARTE SECONDA

Quaternioni di Hamilton.

1. Operatori vettoriali e loro campi di applicazione . . . . Pag 225
2. Definizione dei quaternioni mediante i simboli $\times$ $\wedge$ di operazione per i vettori . . . . . » 225
3. Simboli S, V, K, T; quaternioni retti . . . . . » 226
4. Definizione di Hamilton; identità di questa definizione con la precedente . . . . . » 227
5. Somma e prodotto dei quaternioni . . . . . » 228
6. Potenze . . . . . » 231
7. Operatori I, I^{-1} . . . . . » 232
8. La « symbolical identification » di Hamilton . . . . . » 234
9. L'operatore ∇ (nabla) . . . . . » 235

NOTE STORICHE

1. Origine, notazioni di vettore e di prodotto scalare e vettoriale . . . . . Pag. 239
2. Origine, notazioni di gradiente, divergenza, rotazione . . » 243

BIBLIOGRAFIA

Nuove notazioni e omografie . . . . . Pag. 245

PARTE PRIMA

Operazioni ed Operatori vettoriali.

CAPITOLO PRIMO

Somma e prodotto per un numero.

1. Vettori eguali. — *a*) Se P, Q, R, S, sono *punti* (ordinari, propri) qualunque, con la notazione

$$\mathrm{Vol}(P,\ Q,\ R,\ S),$$

indicheremo il *numero reale* (*relativo*, cioè, *positivo*, o *negativo*, o *nullo*) tale che:

1° Il suo *valore assoluto* è il numero che misura il volume del tetraedro di vertici P, Q, R, S, quando si prenda come unità di misura il cubo avente per lato una lunghezza arbitraria, ma fissata una volta per tutte (unità lineare di misura), e che si riterrà sempre sottintesa;

2° se non è nullo, il suo *segno* è $+$, ovvero $-$, secondochè: disposti l'*indice* e il *medio* della *mano sinistra*, rispettivamente, da P verso Q e da P verso R, è possibile, o pur no, disporre il pollice da P verso S; ovvero, il che equivale, secondochè una *persona* con la *testa* in P, i *piedi* in Q e che *guarda* il segmento RS, vede S alla propria *destra* o alla propria *sinistra* [1].

[1] Il sistema qui adottato è seguito da Hamilton, Tait, ecc. è contrario al sistema così detto della vite a destra adottato da Thomson e Tait in: *Treatise on Natural Phylosophy* (2ª ediz., Cambridge 1895-96, vol. I, § 234; seguito da Maxwell, Gibbs, Heaviside. Maxwell nel suo celebre *Treatise* (edizione francese), p. 26, dice: « L'action combinée des muscles du bras, lorsque nous tournons en dehors le dessus de la main droite, en même temps que nous tendons la main en avant, grave dans la mémoire, mieux que toute definition, la nature du mouvement d'une vis à droite ».

Ciò posto, dati i punti A, B qualunque, per ogni terna di punti P, Q, R, resta determinato il *numero reale*

$$\text{Vol}(B, P, Q, R) - \text{Vol}(A, P, Q, R). \tag{1}$$

È dunque determinato, ed unico, l'*operatore* che applicato, a sinistra, alla terna arbitraria di punti P, Q, R, produce il numero (1). Esso dicesi « vettore dal punto A al punto B » e si indica con la notazione, ora di uso comune (di H. GRASSMANN e R. W. HAMILTON, 1844, 1845),

$$B - A$$

che si legge, come in Algebra, « B meno A ».

In altri termini: se A, B sono punti, definiamo il vettore da A a B, cioè $B - A$ [1], come *quell'operatore (a sinistra) tra terne di punti e numeri reali tale che, qualunque siano i punti P, Q, R, si abbia sempre*

$$(B - A)(P, Q, R) = \text{Vol}(B, P, Q, R) - \text{Vol}(A, P, Q, R). \tag{2}$$

b) La condizione di *eguaglianza* o *identità* (=) di due vettori, si può esprimere nel seguente modo geometrico semplicissimo.

Se A, B, C, D sono punti, si ha

$$B - A = D - C \tag{3}$$

solamente quando

(4) « *punto medio tra A e D* » = « *punto medio tra B e C* ».

Infatti. La (3) vale solamente quando

$$(B - A)(P, Q, R) = (D - C)(P, Q, R)$$

comunque si scelgano i punti P, Q, R. Per la (2) tale condizione equivale a quest'altra

$$\text{Vol}(A, P, Q, R) + \text{Vol}(D, P, Q, R) = \text{Vol}(B, P, Q, R) + \text{Vol}(C, P, Q, R).$$

(1) C. BURALI-FORTI, *Nuove applicazioni degli operatori*, Atti della R. Acc. di Torino, vol. 50, 1915, p. 669; *Logica matematica*, 2ª ediz., p. 311 (Manuali Hoepli, 1919).

Seguiamo la chiara, semplice e precisa esposizione di L. BERZOLARI, *Geometria analitica*, vol. I, 2ª ediz., pp. 445-495 (Manuali Hoepli, 1920).

ovvero, se M è medio tra A e D, e N è medio tra B e C, alla condizione

$$\mathrm{Vol}\,(M,\ P,\ Q,\ R) = \mathrm{Vol}\,(N,\ P,\ Q,\ R),$$

che vale, per P, Q, R arbitrari, solo quando $M = N$, c. d. d.

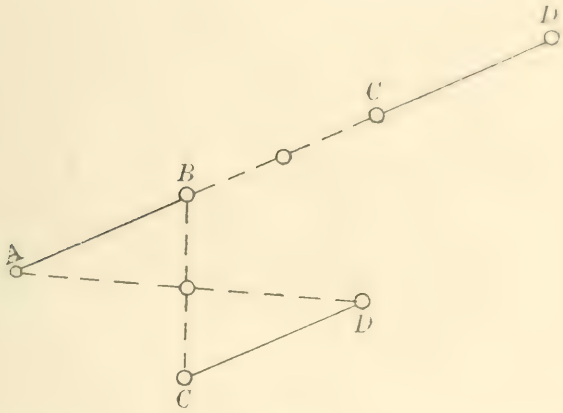

Fig. 1

Se alla (3) si applicano *le ordinarie leggi algebriche del segno meno*, si trae

$$B - D = A - C, \quad C - A = D - B, \quad C - D = A - B,$$

che esprimono l'eguaglianza di altri vettori. Basta perciò osservare che il punto medio tra D ed A è lo stesso del punto medio tra A e D, ecc.

c) Se si suppone $A \neq B$ la condizione (4) può esser sostituita dalle tre seguenti:

1ª *I segmenti AB, CD hanno egual lunghezza:*

2ª *Le rette AB, CD hanno eguali direzioni (sono parallele);*

3ª *Il verso da A a B è identico al verso da C a D.*

d) Indicheremo spesso un vettore con una sola lettera. Dicendo « a è un vettore », esprimiamo che esistono, almeno, i punti A e B tali che

$$a = B - A. \tag{5}$$

Le coppie A, B siffatte sono infinite: ma per due qualunque di esse è vera la (4), o le tre condizioni ad essa equivalenti.

Se a è un vettore e P, Q, R sono punti, la notazione

$$a(P, Q, R)$$

ha lo stesso significato della notazione primo membro della (2), qualunque siano i punti A, B per i quali vale la (5).

2. **Vettore nullo.** — Diremo che il vettore a è *nullo*, quando: comunque si fissino i punti P, Q, R si ha sempre

$$a(P, Q, R) = 0. \tag{6}$$

Risulta dalla (2) che, se A è un punto, allora $A - A$ è un *vettore nullo*. Ma se A, B sono punti, dalla identità

$$B - A = B - A$$

si deduce [cfr. n. 1]

$$A - A = B - B$$

e quindi: *esiste un solo vettore nullo riduttibile sempre alla forma $A - A$, essendo A punto arbitrario.*

Il *vettore nullo* si indicherà col simbolo 0, *zero*.

3. **Lunghezza, direzione, verso, modulo.** — Sia a un vettore. Col variare dei punti A e B in modo che sia sempre vera la (5), non varia la « *distanza* di A da B », e per $a \neq 0$, non variano: « la *direzione* della retta AB », il « *verso* da A a B ». Questi elementi, benchè determinati dalle coppie A, B, sono però delle funzioni del vettore a, e si chiamano, rispettivamente, *lunghezza* (o *grandezza*), *direzione* e *verso* del vettore a.

Il vettore nullo ha lunghezza nulla, ma è privo di direzione e di verso.

Chiamasi « *modulo* del vettore a » e si indica con

$$\operatorname{mod} a,$$

il *numero reale*, positivo o nullo, che misura, *con la stabilita unità di misura*, la lunghezza del vettore a.

Le due condizioni

$$a = 0, \quad \operatorname{mod} a = 0,$$

sono l'una conseguenza dell'altra; cioè: *un vettore è nullo quando è nullo il suo modulo e solamente in tal caso.*

Un vettore $\boldsymbol{a}$ dicesi *unitario* quando mod $\boldsymbol{a} = 1$.

4. Caratteristiche di un vettore: rappresentazione grafica. — Dalle cose precedenti risulta subito che: *due vettori, non nulli, sono eguali solamente quando hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso.*

Ogni ente *caratterizzato* da *lunghezza*, *direzione* e *verso* è dunque un vettore.

Segue che la rappresentazione di un vettore si può fare con una *freccia* della quale: *lunghezza*, *retta* che la contiene, e *punta*, danno, rispettivamente, *lunghezza*, *direzione* e *verso* del vettore.

Sono importanti le seguenti osservazioni sul concetto di vettore [cfr. L. BERZOLARI, l. c.].

a) Potendosi determinare infinite coppie di punti A, B tali che per il dato vettore $\boldsymbol{a}$ si abbia $\boldsymbol{a} = B - A$, ne segue che, il vettore *non* ha particolare *posizione* nello spazio. In altri termini, se $\boldsymbol{a}$ è un vettore non nullo ed A, B, C, D sono punti tali che $\boldsymbol{a} = B - A = D - C$, i punti stessi hanno posizione tali che sodisfano soltanto alla (4), e, per ciò, *non sono* funzioni del vettore $\boldsymbol{a}$.

b) Posto in un modo $\boldsymbol{a} = B - A$, non conviene dire, come si fa talvolta, che A è l'*origine* e B è l'*estremo* del vettore $\boldsymbol{a}$, giacchè, posto ancora $\boldsymbol{a} = D - C$, con A diverso da C, il che è possibile in infiniti modi, i punti *distinti* A, C sarebbero *entrambi* origini di $\boldsymbol{a}$ [1].

c) Il *segmento* di estremi A e B è un ente ben diverso dal vettore $B - A$.

Il segmento AB è una *classe di punti* avente posizione, mentre $B - A$ non è una classe di punti e non ha posizione.

Il segmento AB (per A diverso da B) ha un modulo e una direzione (distanza di A da B, direzione della retta AB), ma ha *due* versi, uno da A verso B e l'altro da B verso A, i quali non possono esser distinti tra loro senza la introduzione di un terzo punto della retta AB. Il vettore $B - A$ ha invece *un solo verso*, indipendente da qualsiasi altro punto della retta AB.

[1] Origine ed estremo di $\boldsymbol{a}$ sono delle *pseudo-funzioni*: come *numeratore e denominatore di un razionale* (nel senso usuale), *monomio*, *binomio*, *trinomio*,..., *termini di una somma*, *fattori di un prodotto*, ecc. [cfr. C. BURALI-FORTI, *Logica Matematica* (Manuali Hoepli, 1919)].

La frase che talora si usa « un vettore è un segmento del quale si considera la lunghezza, direzione e verso », non è quindi esatta.

d) Una *velocità*, o una *accelerazione*, è un vettore, perchè dipende soltanto da *modulo*, *direzione* e *verso*.

Una *forza*, applicata ad un corpo rigido o deformabile, *non* è un vettore, perchè dipende, non soltanto da un vettore, che ne dà il modulo, la direzione e il verso, ma pure dal *punto di applicazione*. Una *forza* è dunque una *funzione di un punto e di un vettore*.

5. **Somma di un punto con un vettore.** — Se A è un punto e $\boldsymbol{a}$ un vettore, con la notazione

$$A + \boldsymbol{a},$$

che si legge « A più $\boldsymbol{a}$ », o « somma del punto A col vettore $\boldsymbol{a}$ » indichiamo il punto B tale che

$$\boldsymbol{a} = B - A.$$

Le due eguaglianze

$$\boldsymbol{a} = B - A, \quad B = A + \boldsymbol{a},$$

esprimono dunque, *come in Algebra e con le stesse leggi dei segni* $+$ $-$, la medesima cosa sotto forme diverse.

Condotta da A la retta parallela ad $\boldsymbol{a}$ e portata su questa, da A e nel verso di $\boldsymbol{a}$, la lunghezza di $\boldsymbol{a}$, otterremo il punto B. Oppure, se $\boldsymbol{a} = N - M$, basterà costruire il punto O che è medio tra A ed N, e quindi il simmetrico B di M rispetto ad O.

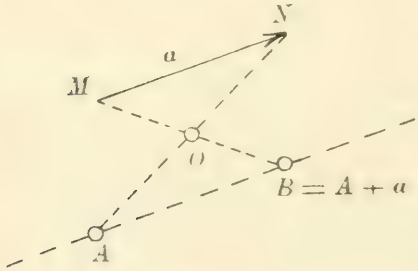

Fig. 2

Risulta di qui che *la somma di un punto con un vettore è un punto univocamente determinato*. Il punto B, inoltre, si ottiene dando ad A la *traslazione* della quale il vettore $\boldsymbol{a}$ individua la grandezza, la direzione e il verso.

Se A, B, C, D sono punti, si ha identicamente,

$$A + (B - A) = B, \quad A + (B - B) = A;$$

e dalla 3 si trae ancora

$$B - A = D - C, \quad A - B = C - D, \text{ ecc.},$$

come in Algebra e sempre con le ordinarie leggi dei segni + —.

Dalla identità $A + (B - A) = B$, e dalla definizione di somma di un punto con un vettore, risulta la *opportunità* di indicare con $B - A$ il « vettore da A a B » e non con $A - B$ come parrebbe, a priori, doversi fare.

6. Somma dei vettori. — *a*) Con la notazione

$$a + b,$$

che si legge « a più b » o « somma di a con b », indicheremo il vettore $(O + a) + b) - O$, qualunque sia il punto O: cioè porremo

$$a + b = (O + a) + b) - O,$$

che ha la forma di una identità algebrica.

Qualunque siano i punti O ed O', la figura formata dai punti O', $O' + a$, $(O' + a) + b$, si ottiene da quella formata analogamente dai punti O, $O + a$, $(O + a) + b$, con la traslazione individuata dal vettore $O' - O$; dunque:

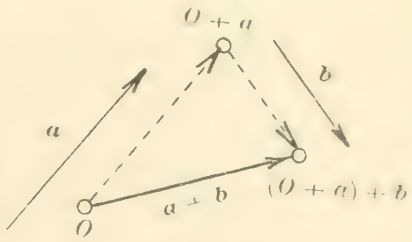

Fig. 3

La somma di due vettori è un vettore, univocamente determinato.

b) Seguendo le ordinarie convenzioni algebriche, porremo

$$a + b + c = (a + b) + c; \quad a + b + c + d = (a + b + c) + d,$$

e così di seguito. Ognuna di tali espressioni individua un vettore.

La somma dei vettori è commutativa ed associativa; cioè

$$a + b = b + a,$$
$$(a + b) + c = a + b + c;$$

e quindi vale l'ordinario algoritmo algebrico del segno +.

Costruendo infatti le somme considerate si ha, in virtù di notissime proprietà di geometria elementare:

$$O + (a + b) = O + b + a,$$

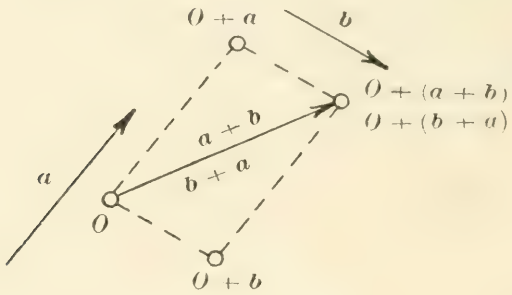

Fig. 4

come risulta dalla Fig. 4, ed inoltre

$$O + \{(a + b) + c\} = O + \{a + b + c\}$$

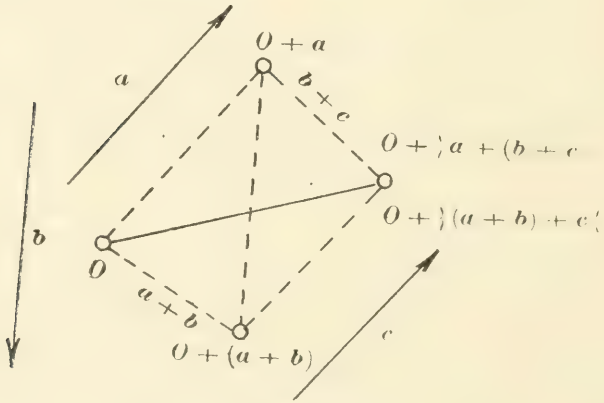

Fig. 5

come risulta dalla Fig. 5; sempre qualunque sia il punto O, e quindi è vero, ecc.

La Fig. 4 dà $a + b$ mediante la *diagonale di un parallelogrammo* e si ha l'ordinaria costruzione per la *composizione* delle velocità, o di due forze applicate ad uno stesso punto.

c) Il vettore somma di più altri $a_1, a_2, \ldots$, in numero finito,

si può costruire fissando ad arbitrio un punto O e costruendo successivamente, i punti

$$A_1 = O + a_1, \quad A_2 = A_1 + a_2 \ldots\ldots \quad A_n = A_{n-1} + a_n :$$

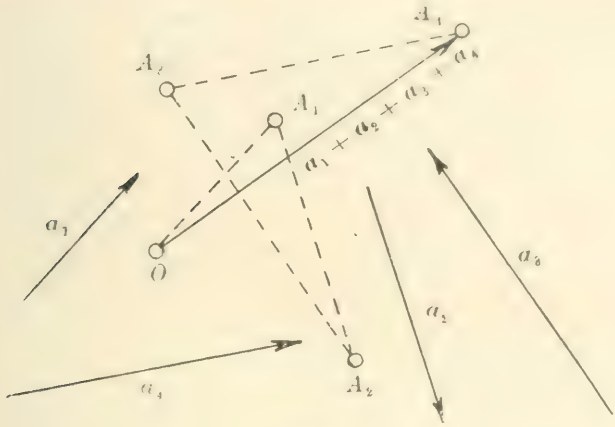

Fig. 6

il vettore $A_n - O$ è la somma richiesta (nella Fig. 6, si ha $n = 4$).

Avremo poi identicamente, *come in Algebra*,

$$(B - A) + (C - B) = C - A ; \quad (C - B) + (A - C) + (B - A) = 0 \ldots\ldots$$

d) L'estremo E della linea poligonale (piana o no) $ABCDE$ resta espresso mediante l'origine A ed i punti intermedi, sotto la forma

$$E = A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D),$$

la quale indica chiaramente il cammino fatto (successive traslazioni) per andare da A ad E.

7. Prodotto di un vettore per un numero reale. — Con la notazione ma o am [1], « prodotto di a per m » essendo m un numero reale e a un vettore, si indica il vettore che ha:

[1] Veramente conviene far uso della *sola* notazione ma ed inoltre si dovrebbe introdurre un *segno di operazione* da porre tra m ed a. Per semplicità seguiamo l'uso comune, sebbene a scapito della esattezza logica. Cfr. in proposito il nostro vol. I di *Analyse vectorielle générale* (Lattes, Torino) pag. 14.

1° la *lunghezza* eguale al prodotto della lunghezza di $\boldsymbol{a}$ per il valore assoluto di m;

2° la *direzione* (supposti $\boldsymbol{a}$ ed m non nulli) identica alla direzione di $\boldsymbol{a}$;

3° il *verso* (supposti ancora $\boldsymbol{a}$ ed m non nulli) identico o contrario a quello di $\boldsymbol{a}$, secondo che m è positivo o negativo.

Queste condizioni individuano il vettore $m\boldsymbol{a}$ poichè ne danno il *modulo*, la *direzione* e il *verso*. Cioè: *il prodotto di un vettore per un numero è un vettore univocamente determinato.*

Le più elementari proprietà dei triangoli simili mostrano subito che, *come in Algebra*, si ha

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},\quad (m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}:$$

inoltre

$$m\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},\quad 0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}:$$

e da $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, segue $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, oppure $m=0$.

Se $m\neq 0$ si porrà, *come in Algebra*,

$$-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),\quad \frac{\boldsymbol{a}}{m}=\frac{1}{m}\boldsymbol{a}:$$

quindi: ***tutto l'algoritmo algebrico delle operazioni +, —, prodotto e quoto per un numero reale, è applicabile ai vettori.***

Inoltre

$$-(B-A)=A-B:$$

e se si pone

$$A-\boldsymbol{a}=A+(-\boldsymbol{a}),$$

avremo ancora, *come in Algebra*,

$$A+(B-C)=A-(C-B):\quad A-(A-B)=B,\ \text{ecc.}$$

Si noti però che *non tutto* il precedente algoritmo si può estendere ai *punti*: così, per es., non ha ancora significato $A+B-C$, cioè $(A+B)-C$: il vettore $m(A-B)$ non si può ancora porre sotto la forma $mA-mB$; ecc.

Nel Cap. III estenderemo ai punti tutto l'algoritmo algebrico già valido pei vettori.

Notiamo infine che se i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ si rappresentano con *frecce* aventi l'origine comune O e su essi si completa il parallelogramma, le due diagonali di questo rappresentano i due vettori $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (oppure $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ a seconda del verso), poichè

si ha identicamente

$$(O + a + b) - O = a + b, \quad (O + a) - (O + b) = a - b.$$

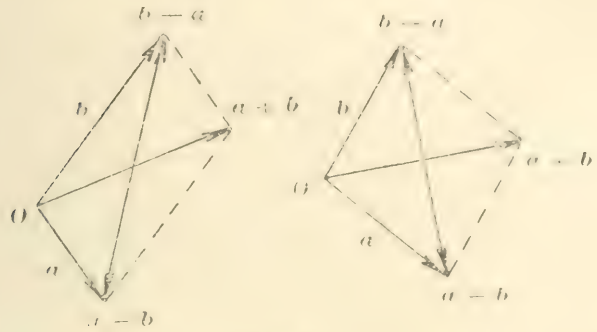

Fig. 7

In particolare, se a, b hanno egual modulo [cfr. Fig. 7], allora $a + b$ e $a - b$ hanno le direzioni delle *bisettrici* degli angoli formati da due qualsiasi rette, complanari, parallele ad a e b.

8. Espressioni lineari di vettori. — Diremo che « il vettore, non nullo, a, è parallelo ad una retta o ad un piano », quando, essendo $a = B - A$, la retta AB è parallela alla retta o al piano considerati. Diremo che « i vettori, non nulli, a, b sono paralleli », « che i vettori, non nulli, a, b, c sono complanari » quando essi sono paralleli ad una stessa retta o ad uno stesso piano. Per generalizzare poi questa nomenclatura, diremo che: il vettore nullo è parallelo a qualsiasi vettore, è complanare con qualsiasi coppia di vettori. Inoltre diremo che i vettori a, b sono *ortogonali* quando sono paralleli a due rette ortogonali; che il vettore a è *normale ad un piano* π, quando a è parallelo ad una retta normale al piano π.

È chiaro che: a e b sono paralleli quando i punti O, $O + a$, $O + b$ sono collineari; a, b, c sono complanari quando i punti O, $O + a$, $O + b$, $O + c$ sono complanari.

a Ogni vettore a parallelo al vettore non nullo i, si può esprimere linearmente, in un sol modo, mediante i: cioè

$$a = xi$$

e il numero reale x è unico.

I due vettori $\text{mod}\, i\, a$, $\text{mod}\, a\, i$ hanno a comune lunghezza e direzione e si ha

$$\text{mod}\, i\, a = \pm \text{mod}\, a\, i,$$

secondochè a ed i hanno egual verso o verso contrario: quindi

$$x = \pm \frac{\text{mod}\, a}{\text{mod}\, i}$$

in un sol modo.

b) Ogni vettore a complanare con i vettori non paralleli, e quindi non nulli, i, j, si può esprimere linearmente, in un sol modo, mediante i e j: cioè

$$a = xi + yj,$$

e la coppia di numeri reali x, y, è unica.

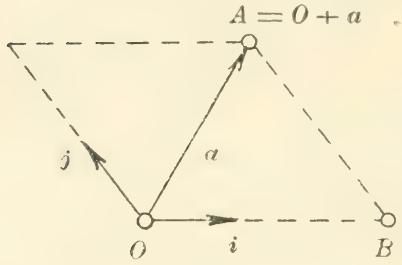

Fig. 8

Le parallele condotte da O ed $O + a = A$ rispettivamente ai vettori i e j si incontrino in B. Si ha identicamente

$$a = B - O + A - B:$$

ma $B - O$ ed $A - B$ sono paralleli ad i ed j: quindi, per il teorema precedente, si ha, *almeno in un modo*,

$$a = xi + yj.$$

Se, in altro modo, si ottiene

$$a = x'i + y'j,$$

sottraendo si ha

$$(x - x')i + (y - y')j = 0:$$

se $x - x' \neq 0$ oppure $y - y' \neq 0$, allora i od j si potrebbe esprimere linearmente mediante j od i e quindi i ed j sarebbero paralleli contrariamente all'ipotesi. Dunque $x = x'$, $y = y'$, cioè la coppia x, y è unica.

c) Con un ragionamento completamente identico si può infine provare che:

Ogni vettore a si può esprimere linearmente, in un sol modo, mediante i vettori non complanari i, j, k; cioè:

$$a = xi + yj + zk,$$

e la terna x, y, z di numeri reali è unica.

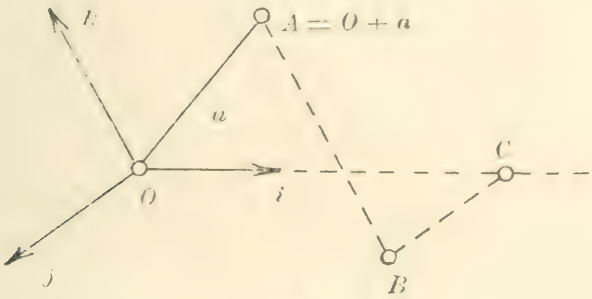

Fig. 9

Nei seguenti numeri (9-11) faremo alcune applicazioni dei risultati precedenti.

9. Punti di una retta, di un piano, dello spazio. — Posto

$$P = A + x(B - A),$$

P è un punto della retta AB; viceversa, poichè P sta sulla retta AB quando $P - A$ è parallelo a $B - A$, ogni punto della retta AB è esprimibile con quella forma.

Analogamente se A, B, C non sono collineari, il punto

$$P = A + x(B - A) + y(C - A),$$

col variare di x ed y nel campo dei numeri reali, percorre tutto il piano ABC.

Finalmente, per A, B, C, D non complanari,

$$P = A + x(B - A) + y(C - A) + z(D - A),$$

col variare di x, y, z, percorre tutto lo spazio.

Dunque si possono esprimere tutti i punti di una retta, di un piano, dello spazio, mediante *due, tre o quattro punti fissi.*

10. Coordinate dei vettori. — Se i, j, k sono vettori non complanari, ad ogni vettore u si può dare la forma

$$u = ai + bj + ck,$$

ove a, b, c sono numeri reali. Questi numeri diconsi « *coordinate* di u rispetto al sistema di riferimento i, j, k » e i vettori ai, bj, ck diconsi « *componenti* di u rispetto alle direzioni di i, j, k ».

È subito chiaro che le coordinate di mu sono i prodotti di m per le coordinate di u; le coordinate della somma di vettori sono le somme delle coordinate omonime dei vettori, ecc.

Si ponga

$$u = ai + bj + ck, \quad u' = a'i + b'j + c'k, \quad u'' = a''i + b''j + c''k.$$

I vettori u, u' sono paralleli solamente quando hanno le coordinate proporzionali: cioè

per $a'b'c' \neq 0$, $\quad a : a' = b : b' = c : c'$;

per $a'b' \neq 0$, $c' = 0$ $\quad a : a' = b : b'$, $c = 0$;

per $a' \neq 0$, $b' = c' = 0$ $\quad a$ qualunque, $b = c = 0$.

Infatti deve essere $u = mu'$, cioè

$$a = ma', \quad b = mb', \quad c = mc'; \text{ ecc.}$$

I vettori u, u', u'' sono complanari solamente quando è nullo il determinante formato con le loro coordinate, cioè

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Infatti deve essere

$$u = mu' + nu'',$$

quindi

$$a = ma' + na'', \text{ ecc.}$$

11. Coordinate cartesiane. — I tre vettori i, j, k siano di egual modulo ed O sia un punto. Qualunque sia il punto P, il vettore $P - O$ sarà della forma espressa al n. 8: e quindi

$$P = O + xi + yj + zk.$$

I numeri x, y, z sono le *coordinate cartesiane* di P rispetto al sistema di riferimento di cui: O ne è l'*origine*; le parallele condotte da O ad $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ne sono gli *assi*; i versi di $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sono *i versi positivi degli assi*; la lunghezza di uno qualunque dei tre vettori ne è l'*unità di riferimento*.

Il punto P è così espresso mediante le sue coordinate e tutto il sistema di riferimento in modo semplicissimo e, ciò che più interessa, *assoluto*, poichè le coordinate di un punto non bastano a individuare il punto se non è pure dato il sistema di riferimento.

L'ordinario algoritmo per le equazioni di rette e piani si ottiene facilmente dalle note proprietà dei vettori e perde quindi ogni importanza assoluta. Noi lo esamineremo rapidamente. Intendiamo posto:

$$P_0 = O + x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}, \quad P_1 = O + x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k},$$
$$P_2 = O + x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{i} + z_2\boldsymbol{k}, \quad P_3 = O + x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k},$$
$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{u} = m\boldsymbol{i} + n\boldsymbol{j} + p\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{u}' = m'\boldsymbol{i} + n'\boldsymbol{j} + p'\boldsymbol{k}.$$

a) L'equazione della retta che passa per P_0 e P_1 si otterrà esprimendo che il vettore $P - P_0$ è parallelo a $P_1 - P$ e quindi (cfr. n. 10

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Parimenti, l'equazione della retta uscente da P_0 e parallela al vettore $\boldsymbol{u}$ è, per la stessa ragione,

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

L'equazione del piano individuato dai tre punti P_0, P_1, P_2 si otterrà esprimendo che i vettori $P - P_0$, $P_1 - P_0$, $P_2 - P$ sono complanari; quindi

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sostituendo in questa ad x, y, z le coordinate del punto P, cioè x_0, y_0, z_0 si ha la condizione necessaria e sufficiente affinchè i punti P_0, P_1, P_2, P_3 siano complanari.

L'equazione del piano uscente da P_0 e parallelo ai vettori u e u' è:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m & n & p \\ m' & n' & p' \end{vmatrix} = 0.$$

Abbiamo ottenute così le *equazioni esplicite* della retta e del piano.

È facile ottenere le *equazioni parametriche*.

Il punto P sta sulla retta uscente da P_0 e parallela ad u, quando

$$P = P_0 + hu = O + x_0 i + hm i + \ldots\ldots;$$

quindi

$$x = x_0 + hm, \quad y = y_0 + hn, \quad z = z_0 + hp.$$

Per il piano condotto da P_0 parallelamente ad u e u', avremo allo stesso modo

$$x = x_0 + hm + h'm', \quad y = y_0 + hn + h'n', \quad z = z_0 + hp + h'p'.$$

Eliminando h, oppure h e h', si ritrovano le equazioni precedenti.

b La

$$ax + by + cz + d = 0,$$

a, b, c non tutti nulli, è l'equazione di un piano. Supposto $c \neq 0$, ricaviamo z dalla precedente e sostituiamo il valore ricavato nella espressione di P. Otterremo

$$P = O + xi + yj - \left(\frac{d}{c} + \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y\right)k$$

cioè

$$P = O - \frac{d}{c}k + \frac{x}{c}ci - ak + \frac{y}{c}cj - bk;$$

dunque il punto P descrive il piano uscente da $O - (d/c)k$ e parallelo ai due vettori $ci - ak$, $cj - bk$. Ricavando invece x o y,

e operando come prima, si trova che il piano in questione è parallelo ai vettori

$$bk - cj, \quad ci - ak, \quad aj - bi,$$

ed abbiamo così il *significato geometrico dei numeri* a, b, c.

È assai facile trovare le condizioni di parallelismo di due rette o di due piani. Per una retta ed un piano

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad ax + by + cz + d = 0,$$

basterà esprimere che il vettore u è complanare con $bk - cj$, e $ci - ak$; cioè

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \end{vmatrix} = 0$$

oppure

$$cma + nb + pc = 0,$$

e, sia per $c \neq 0$ che per $c = 0$,

$$am + bn + cp = 0$$

a causa della simmetria rispetto ad a, b, c e m, n, p.

Il lettore può continuare, ricordando di ridurre ogni questione dell'algoritmo cartesiano, alla questione geometrica corrispondente, mediante *il significato geometrico assoluto dei numeri che compariscono nelle equazioni.*

Risulta chiaramente che, una volta introdotti i vettori, il complesso algoritmo delle coordinate cartesiane diviene del tutto inutile.

CAPITOLO II.

Prodotto interno e vettoriale.

1. Angolo di due vettori. — Siano a, b vettori non nulli. Con la notazione

$$\operatorname{ang}(a, b),$$

si indicherà « la *misura in radianti* dell'angolo, convesso o piatto, formato dalle due *semirette* aventi a comune l'estremo O arbitrario e passanti per i punti $O + a$, $O + b$ rispettivamente ».

L'$\operatorname{ang}(a, b)$ è un numero reale, positivo o nullo, univocamente determinato, funzione di a e b soltanto, e appartenente all'*intervallo* i cui estremi sono 0, π.

È evidente che, essendo m, n numeri reali non nulli e di egual segno, si ha:

$$\operatorname{ang}(a, b) = \operatorname{ang}(b, a) = \operatorname{ang}(ma, nb)$$
$$\operatorname{ang}(a, a) = 0, \quad \operatorname{ang}(a, b) + \operatorname{ang}(a, -b) = \pi.$$

Inoltre:

$$\operatorname{ang}(a, b) = 0,$$

significa che a, b sono paralleli e di egual verso;

$$\operatorname{ang}(a, b) = \pi,$$

che a, b sono paralleli e di verso contrario: e finalmente

$$\operatorname{ang}(a, b) = \pi/2,$$

che a e b sono perpendicolari.

Per brevità di scrittura, porremo

$$\operatorname{sen}(a, b) = \operatorname{sen} \operatorname{ang}(a, b).$$

e così per le altre funzioni circolari. È chiaro che sen (a, b) può variare tra 0 ed 1; mentre cos (a, b) può variare tra -1 e $+1$.

Se uno, almeno, dei vettori a, b è nullo, non si può dar significato alla notazione ang (a, b); però scriveremo ancora sen (a, b), cos (a, b) intendendo indicare sempre, ad es., il numero *zero* (e sarebbe indifferente stabilire *uno*, ovvero un numero compreso tra 0 ed 1).

2. **Prodotto interno.** — *a*) Chiameremo « prodotto interno, o scalare, di a per b », essendo a, b vettori qualunque, e l'indicheremo con la notazione

$$a \times b,$$

che si legge « a interno b », o anche « a scalare b », il numero reale definito dalla eguaglianza

$$a \times b = \text{mod}\, a \cdot \text{mod}\, b \cdot \cos(a, b). \tag{1}$$

La interpretazione geometrica e meccanica della (1) è molto importante.

Se mod $a = 1$, allora $a \times b$ è la misura, con un segno, della *proiezione ortogonale* della lunghezza di b su di una retta parallela ad a. Più precisamente: se, per mod $a = 1$ e $b = B - A$,

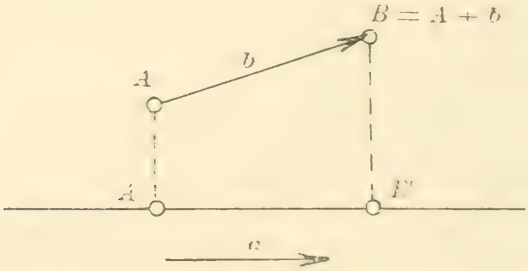

Fig. 1

sono A', B' le proiezioni ortogonali di A e B su di una qualsiasi retta parallela ad a, per il vettore $B' - A'$, che può chiamarsi « proiezione ortogonale di b nella direzione del vettore a », si ha

$$B - A = a \times b \cdot a \tag{2}$$

come risulta immediatamente dalla (1) osservando che: $B - A$ è nullo solo per $b = 0$, oppure per $b \neq 0$ quando si ha ang $(a, b) = \pi/2$: se $B - A \neq 0$, il vettore $B - A$ ha lo stesso verso o verso contrario di a secondochè ang (a, b) è acuto o ottuso.

Quindi, sempre per mod $a = 1$,

$$a \times b \cdot a \quad \text{è la componente di } b \text{ parallela ad } a:$$
$$b - a \times b \cdot a \quad \text{è la componente di } b \text{ normale ad } a.$$

Se la *forza* di vettore a (costante) trasporta il punto di applicazione da O in $O + b$ in linea retta, il *lavoro* compiuto è misurato da $a \times b$.

b) Le proprietà fondamentali del prodotto interno sono espresse dalle formule seguenti, nelle quali a, b, c sono vettori e m è numero reale.

$$(3)\quad \begin{cases} a \times 0 = 0 \times a = 0 \\ \text{da } a \times b = 0 \text{ segue } a = 0, \text{ o } b = 0, \text{ o } a \text{ normale a } b. \end{cases}$$

$$(4)\quad a \times b = b \times a.$$

$$(5)\quad (ma) \times b = (ma) \times b = a \times (mb)$$

$$(6)\quad \begin{cases} a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\ (a + b) \times c = a \times c + b \times c \end{cases}$$

$$(7)\quad a = a \times u \cdot u \quad \text{per } u \text{ vettore unitario parallelo ad } a.$$

Le (3) sono immediate conseguenze della (1): per $a \neq 0$ e $b \neq 0$, deve essere ang $(a, b) = \pi/2$, cioè a e b perpendicolari.

La (4) è evidente per $a = 0$, ovvero $b = 0$. Se, invece, nessuno dei vettori a, b è nullo, allora la (4) è vera, per la (1), perchè ang $(a, b) =$ ang (b, a).

La (5) è vera quando uno degli enti a, b, m è nullo. Se nessuno di questi è nullo, allora la (5) risulta dalla (1) osservando che

$$\text{ang}(a, b) = \text{ang}(ma, b), \quad \text{ovvero} \quad \text{ang}(a, b) = \pi - \text{ang}(ma, b)$$

secondochè m è positivo o negativo.

La prima delle (6) è vera per $a = 0$. Se $a \neq 0$ basta, a causa della (5), dimostrarla quando mod $a = 1$. Supposto, dunque, mod $a = 1$, posto $b = B - A$, $c = C - B$ ed essendo A, B, C

le proiezioni ortogonali dei punti A, B, C su di una retta parallela ad a, si ha dalla (2)

$$B' - A' = a \times b \cdot a, \quad C' - B' = a \times c \cdot a, \quad C' - A' = a \times (b + c) \cdot a;$$

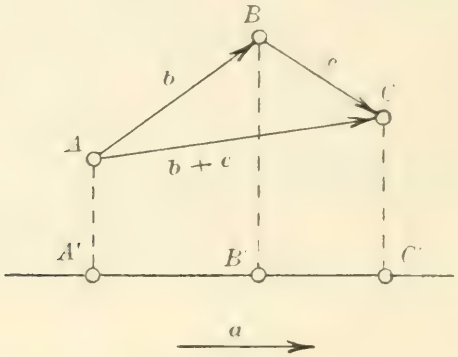

Fig. 11

sommando le prime due si ha

$$C' - A' = (a \times b + a \times c) \cdot a$$

che, confrontata con la terza, dà

$$a \times (b + c) \cdot a = (a \times b + a \times c) \cdot a$$

da cui risulta subito la prima delle (6). La seconda delle (6) risulta dalla prima e dalla (4).

Se u è parallelo ad a si ha $a = mu$ e quindi moltiplicando per u, $a \times u = m \cdot u \times u$; ma $u \times u = 1 \cdot 1 \cdot \cos u, u = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$ e quindi $m = a \times u$, il che dimostra la (7). Lo stesso si ottiene (cfr. a) mediante la nota espressione della componente di a parallela ad u.

La prima delle (3) e le (4), (5), (6) provano che per il segno $\times$ di *operazione* vettoriale, valgono le ordinarie proprietà del *prodotto algebrico* di *due fattori*: di non più di due poiche le notazioni $(a \times b) \times c$, $a \times (b \times c)$ sono attualmente prive di significato e non è possibile dargliene uno in modo che, valendo le (1)-(7), valgano le ordinarie proprietà del prodotto algebrico di tre o più fattori. Le altre formule esprimono *proprietà geometriche* del prodotto interno, ed è da tener presente che

$$a \times b = 0$$

è la *condizione di perpendicolarità dei vettori* a, b.

Diamo due applicazioni delle proprietà ora esaminate.

1° *Tra i punti arbitrari A, B, C, D ha luogo la identità*

$$(B-C)\times(A-D)+(C-A)\times(B-D)+(A-B)\times(C-D)=0.$$

Infatti: osservando che

$$(B-C)\times(A-D)=[(B-D)-(C-D)]\times(A-D),$$

sviluppando con la (6), facendo lo stesso per gli altri termini e applicando la (4), si ha subito la identità indicata.

Tale identità prova che: *se in un tetraedro due coppie di lati opposti sono ortogonali, sono pure ortogonali i lati della terza coppia;* oppure: *se D è il punto comune a due delle altezze del triangolo ABC, anche la rimanente altezza passa per D.*

2° *Siano P, A, B punti non collineari e C il punto nel quale si incontrano le normali condotte (nel piano PAB) dai punti A, B alle rette PA, PB. Dimostrare che le antiparallele alla retta AB, rispetto alle rette PA, PB, sono normali alla retta PC.*

Si ponga, per brevità di scrittura,

$$a=\operatorname{mod}(A-P),\quad u=(A-P)/a$$
$$b=\operatorname{mod}(B-P),\quad v=(B-P)/b.$$

È ovvio che i vettori u, v sono unitari e paralleli, e di egual verso, ai vettori $A-P$, $B-P$.

Se si considerano i punti

$$A_1=P+bu,\quad B_1=P+av,$$

la cui costruzione è immediata, la retta A_1B_1 è una delle antiparallele considerate ad AB ed ha la direzione del vettore

$$A_1-B_1=bu-av.$$

Ora, per il punto C si ha

$$(C-A)\times u=0,\quad (C-B)\times v=0,$$

ed osservando che, ad es., $C-A=(C-P)-(A-P)$ si ha subito

$$(C-P)\times u=(A-P)\times u=a,\quad (C-P)\times v=(B-P)\times v=b;$$

moltiplicando rispettivamente per b ed a e sottraendo

$$(C - P) \times (bu - av) = 0 \quad \text{cioè,} \quad (C - P) \times (A_1 - B_1) = 0$$

che dimostra il teorema.

c) Se, *come in Algebra*, si pone, essendo a vettore arbitrario,

$$a^2 = a \times a, \tag{8}$$

risulta subito, per b pure vettore arbitrario,

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = (\text{mod}\, a)^2, \quad \text{mod}\, a = \sqrt{a^2}, \\ (a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2, \quad (a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2. \end{array}\right. \tag{9}$$

Ad es., per i vettori a, b, c si hanno le identità seguenti, che il lettore può dimostrare per esercizio:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$(a + b + c)^2 + (-a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 + (a + b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

la prima delle quali esprime che: *la somma dei quadrati delle diagonali di un parallelogrammo è equivalente alla somma dei quadrati dei lati*; e analogamente per le altre.

3. **Prodotto vettoriale.** — *a*) Chiameremo « prodotto vettoriale (o anche esterno) di un vettore a per un altro b » e l'indicheremo con la notazione

$$a \wedge b,$$

che si legge « a vettore b » o « a esterno b », quel vettore u tale che:

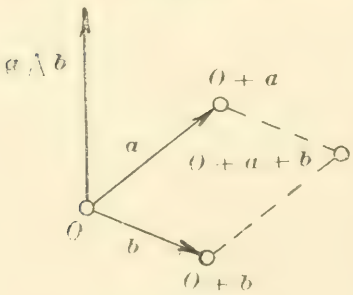

Fig. 12

1° il mod u è eguale a mod a · mod b · sen (a, b): cioè è la misura, col quadrato dell'unità lineare, dell'area del parallelogrammo di vertici O, $O + a$, $O + a + b$, $O + b$;

2° la *direzione* di u (per $u \neq 0$) è *normale* ad a e b: cioè normale ad un piano parallelo ai due vettori al piano del parallelogrammo considerato prima;

3° il *verso* di $a \wedge b$ per $a \neq 0$ è quello che può prendere il *pollice* della *mano sinistra*, quando si dispongono l'*indice* ed il *medio* rispettivamente nella direzione e verso di a e b: vale a dire si ha $\mathrm{Vol}\,(O, O+a, O+b, O+a \wedge b) > 0$ qualunque sia il punto O.

Il vettore $a \wedge b$ è così univocamente determinato, una volta fissata l'unità lineare di misura, risultandone individuata grandezza, direzione e verso.

b) Le proprietà fondamentali dell'operazione $\wedge$ sono espresse dalle formule seguenti, nelle quali a, b, c sono vettori e m è numero reale.

$$(1)\quad \begin{cases} a \wedge 0 = 0 \wedge a = a \wedge a = 0; \\ \text{da } a \wedge b = 0 \text{ risulta } a = 0, \text{ o } b = 0, \text{ o } a \text{ parallelo a } b \end{cases}$$

$$(2)\quad ma \wedge b = ma \wedge b = a \wedge mb$$

$$(3)\quad \begin{cases} a \wedge (b+c) = a \wedge b + a \wedge c \\ (a+b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c \end{cases}$$

$$(4)\quad a \wedge b = -b \wedge a$$

$$(5)\quad \mathrm{mod}\,(a \wedge b) = \mathrm{mod}\,a \cdot \mathrm{mod}\,b \cdot \mathrm{sen}\,(a, b).$$

Le proprietà (1), (2) e (5) risultano dalla definizione stessa e dall'osservazione che ma è vettore avente la stessa direzione di a ed il verso eguale o contrario secondo che m è positivo o negativo: e facilmente pure si deduce la (4). La dimostrazione di (3) richiede qualche maggior sviluppo.

Poniamo anzitutto

$$b = ma + b'$$

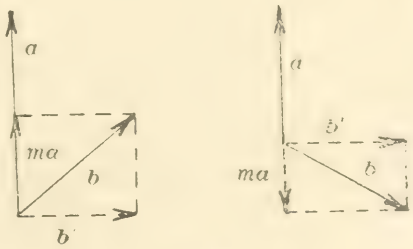

Fig. 13

con b' normale ad a; cioè ma e b' siano le componenti di b parallela e normale ad a; allora è chiaro [cfr. Fig. 13] che

$$a \wedge b = a \wedge b',$$

perchè questi due vettori hanno egual direzione, egual verso ed egual modulo, essendo il parallelogrammo costruito su a, b equivalente al rettangolo costruito su a e b'. Ciò posto, se b

e c sono normali ad a la (3) è subito verificata. Infatti supposto che a sia unitario (e ciò, per la (2), toglie nulla alla generalità), il vettore $a \wedge b$ si ottiene da b con una rotazione di 90°

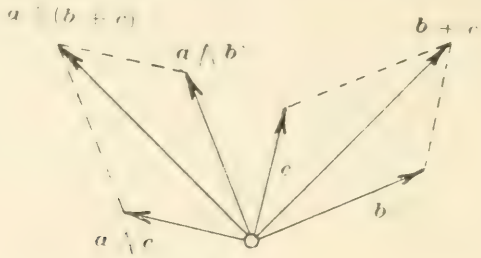

Fig. 14

nel piano normale ad a e in un senso ben determinato: la stessa rotazione subiscono c e $b + c$ e dànno $a \wedge c$ e $a \wedge (b + c)$ e quindi il teorema è vero. Nel caso generale poi potremo sempre porre

$$b = ma + b', \quad c = na + c',$$

con b', c', e quindi anche $b' + c'$, normali ad a. Allora

$$a \wedge (b + c) = a \wedge (m + n)a + b' + c') = a \wedge (b' + c'),$$

per la prima osservazione fatta; e di seguito

$$a \wedge (b' + c') = a \wedge b' + a \wedge c' = a \wedge b + a \wedge c;$$

il teorema è così dimostrato.

c) La prima delle (1), le (2) e (3) sono proprietà comuni col prodotto algebrico.

La seconda delle (1) dice che la *condizione di parallelismo* dei vettori a, b è

$$a \wedge b = 0.$$

La (4) esprime che non sussiste la proprietà *commutativa*: però il cambiamento di ordine produce soltanto cambiamento di segno. Nemmeno sussiste la proprietà *associativa*, perchè i due vettori $a \wedge b \wedge c$ e $a \wedge b \wedge c$ sono in generale diversi, come vedremo fra poco, e quindi la notazione $a \wedge b \wedge c$ è priva di significato preciso.

d) Se i, j sono vettori unitari ($i^2 = j^2 = 1$) e ortogonali ($i \times j = 0$) e si definisce un nuovo vettore k, ponendo

$$k = i \wedge j,$$

il sistema i, j, k è *destrogiro ortogonale*. Valgono le relazioni

$$(6) \qquad \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = 1 \\ j \times k = k \times i = i \times j = 0 \\ i = j \wedge k, \quad j = k \wedge i, \quad k = i \wedge j, \end{cases}$$

e qualunque sia il vettore a si ha identicamente

$$(7) \qquad a = a \times i \cdot i + a \times j \cdot j + a \times k \cdot k,$$

poichè essendo $a = xi + yj + zk$ si ha, moltiplicando ($\times$), rispettivamente, per i, j, k

$$x = a \times i, \quad y = a \times j, \quad z = a \times k.$$

4. Relazioni tra prodotto interno e vettoriale. — *a*) Si hanno le due formule importantissime seguenti, che esprimono il teorema del *duplice prodotto vettoriale*,

$$(1) \qquad a \wedge (b \wedge c) = a \times c \cdot b - b \times c \cdot a$$

$$(2) \qquad a \wedge (b \wedge c) = a \times c \cdot b - a \times b \cdot c,$$

la prima delle quali esprime il vettore $a \wedge (b \wedge c)$, complanare con i vettori a, b e normale a c, linearmente mediante i vettori a, b; analogamente per la (2).

La (2) è conseguenza immediata della (1) e della (4) del n. 3,

$$a \wedge (b \wedge c) = -(b \wedge c) \wedge a = -c \wedge b \wedge a,$$

e quindi basta dimostrare la (1).

La (1) è vera se uno dei vettori a, b è nullo. In ciò che segue supponiamo $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Siano a, b ortogonali, cioè $a \times b = 0$. Non si toglie nulla alla generalità supponendo a, b unitari, cioè $a^2 = b^2 = 1$, e ciò

in virtù della (2) del n. 3. Nelle ipotesi ora fatte $a \times b = 0$, $a^2 = b^2 = 1$ il sistema $a, b, a \wedge b$ è unitario-ortogonale-destrogiro e quindi [cfr. le (6), (7) del n. 3]

$$a \wedge (b \wedge a) = b, \quad a \wedge (b \wedge b) = -a,$$
$$c = c \times a \cdot a + c \times b \cdot b + c \times (a \wedge b) \cdot a \wedge b:$$

in conseguenza moltiplicando esternamente ($\wedge$) quest' ultima, a sinistra, per $a \wedge b$ si ha subito

$$(a \wedge b) \wedge c = c \times a \cdot b - c \times b \cdot a,$$

vale a dire: la (1) è vera quando $a \times b = 0$.

Siano ora a, b qualunque e si ponga

$$b = ma + b_1 \quad \text{con } b_1 \times a = 0:$$

allora si ha

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge c &= (a \wedge b_1) \wedge c = a \times c \cdot b_1 - b_1 \times c \cdot a \\ &= a \times c \cdot b - ma - b \times c + ma \times c \cdot a \\ &= a \times c \cdot b - b \times c \cdot a - ma \times c \cdot a + ma \times c \cdot a\end{aligned}$$

e quindi la (1) è vera in generale.

a Applicando le (1), (2) alle permutazioni circolari del gruppo a, b, c si hanno le *identità* seguenti fra tre vettori:

$$(3) \qquad \begin{aligned}(a \wedge b) \wedge c + (c \wedge a) \wedge b + (a \wedge b) \wedge c &= 0 \\ (b \wedge c) \wedge a + (c \wedge a) \wedge b + (a \wedge b) \wedge c &= 0.\end{aligned}$$

Per $a^2 = 1$, cioè per a unitario, si ha subito, dalla (1) e dalla precedente espressione della « componente di b normale ad a »,

$$(a \wedge b) \wedge a = \text{« componente di } b \text{ normale ad } a \text{ »},$$

che è interessante confrontare con la formula già nota.

Per $a \neq 0$ le due componenti sono, evidentemente, sia o pur no $a^2 = 1$,

$$\frac{(a \wedge b) \wedge a}{a^2}, \quad \frac{a \times b \cdot a}{a^2}.$$

b. Le notazioni $a \times b \wedge c$, $a \wedge b \times c$ indicano due numeri ben determinati; mentre sono prive di significato le due notazioni $(a \times b) \wedge c$, $a \wedge (b \times c)$. Converremo di scrivere le prime senza parentesi; cioè porremo

$$a \times b \wedge c = a \times (b \wedge c)$$
$$a \wedge b \times c = a \wedge (b \times c)$$

intendendo sempre di escludere i due aggruppamenti privi di significato. Si osservi poi bene che, per l'applicazione delle proprietà formali, alla notazione, semplice ma non precisa, $a \times b \wedge c$, deve sempre sostituirsi la notazione precisa $a \times b \wedge c$. Così, p. es., $a \times b \wedge c = a' \times b' \wedge c$, *non* si può dedurre dall'essere $a \times b = a' \times b'$, come risulta evidente colle notazioni precise; dall'essere $b \times c = 0$ non deriva $a \wedge b \times c = 0$, come ora vedremo; ecc.

Le proprietà fondamentali del *prodotto misto* $a \times b \wedge c$, o del prodotto misto $a \wedge b \times c$ sono le seguenti:

(4) $a \times b \wedge c = 0$ solamente quando « *a, b, c sono complanari* »

(5) $a \times b \wedge c = a \wedge b \times c$

(6) $a \times b \wedge c = -b \times a \wedge c = -a \times c \wedge b$ = ecc.

(7) $a \times b \wedge c = 6 \operatorname{Vol}(O, O + a, O + b, O + c)$, O arbitrario;

vale a dire: *il prodotto misto si annulla soltanto quando i tre vettori sono complanari* (in particolare, se due o tre fattori sono eguali, o multipli di uno stesso vettore); *si possono scambiare tra loro i segni* $\times$ $\wedge$, *purchè non si cambi l'ordine dei fattori: il cambiamento di posto di due fattori produce cambiamento di segno, ma non di valore assoluto; il significato della* (7) *è ovvio.*

Giova notare esplicitamente che combinando le (5) e (6) si ottengono le eguaglianze seguenti

$$a \times b \wedge c = b \times c \wedge a = c \times a \wedge b = a \wedge b \times c = b \wedge c \times a = c \wedge a \times b$$

che dànno le *sei* forme sotto le quali può scriversi uno stesso prodotto misto.

Queste proprietà presentano analogia con altre ben note dei determinanti. La loro dimostrazione non presenta difficoltà.

La (4) dice che a è normale a $b \wedge c$ che a sua volta è normale a b e c: dunque a è complanare con b e c. Viceversa, ecc.

Per dimostrare la (5), sostituiamo nella (1) c con $b \wedge c$, nella (2) poniamo $a \wedge b$ al posto di a e osserviamo che $b \times b \wedge c = 0$, $a \wedge b \times b = 0$ perchè b è normale a $b \wedge c$ ecc.: allora si ha

$$(a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = a \times b \wedge c \cdot b, \quad (a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = a \wedge b \times c \cdot b,$$

e in conseguenza

$$a \times b \wedge c \cdot b = a \wedge b \times c \cdot b$$

che dimostra la (5), ovviamente vera per $b = 0$, quando $b \neq 0$.

Le (6) si deducono subito da (5) e dalla (4) del n. 3. Resta da dimostrare la (7).

Sia h la misura, con segno, della distanza di $O + a$ dal piano dei punti O, $O + b$, $O + c$. Si ha

$$h = \operatorname{mod} a \cdot \cos(a, b \wedge c) = \operatorname{mod} a \cdot \frac{a \times b \wedge c}{\operatorname{mod} a \cdot \operatorname{mod}(b \wedge c)} = \frac{a \times b \wedge c}{\operatorname{mod}(b \wedge c)},$$

da cui si trae

$$a \times b \wedge c = h \cdot \operatorname{mod}(b \wedge c),$$

che dimostra la (7) perchè $\operatorname{mod}(b \wedge c)$ è la misura dell'area di base ed h è l'altezza del parallelepipedo.

c) Qualunque siano i vettori a, b, c, d, u, v, w si hanno le notevoli identità seguenti:

$$(8) \quad b \times c \wedge d \cdot a - c \times d \wedge a \cdot b + d \times a \wedge b \cdot c - a \times b \wedge c \cdot d = 0,$$

ovvero sotto altra forma

$$(8') \quad a \times b \wedge c \cdot u = u \times b \wedge c \cdot a + u \times c \wedge a \cdot b + u \times a \wedge b \cdot c,$$

che per a, b, c non complanari (cioè $a \times b \wedge c \neq 0$) esprime u linearmente mediante a, b, c.

$$(9) \quad a \times b \wedge c \cdot u = u \times a \cdot b \wedge c + u \times b \cdot c \wedge a + u \times c \cdot a \wedge b$$

che per a, b, c non complanari esprime u linearmente me-

diante i vettori, pure non complanari, $b \wedge c$, $c \wedge a$, $a \wedge b$.

$$(10) \qquad (a \wedge b) \wedge (u \wedge v) = \begin{vmatrix} a \times u & v \cdot b & b \times u & v \cdot a \\ v \times a & b \cdot u & u \times a & b \cdot v \end{vmatrix}$$

$$(11) \qquad (a \wedge b) \times (u \wedge v) = \begin{vmatrix} a \times u \cdot b \times v & a \times v \cdot b \times u \\ a \times u & b \times u & a \times u & a \times v \\ a \times v & b \times v & b \times u & b \times v \end{vmatrix}$$

$$(12) \qquad a \times b \wedge c \cdot u \times v \wedge w = \begin{vmatrix} a \times u & a \times v & a \times w \\ b \times u & b \times v & b \times w \\ c \times u & c \times v & c \times w \end{vmatrix}$$

che esprimono il prodotto vettoriale o interno di due prodotti vettoriali e il prodotto algebrico di due prodotti misti.

In particolare dalla (11) si ha

$$(11') \qquad (a \wedge b)^2 = a^2 b^2 - (a \times b)^2$$

della quale si fa spesso uso in Meccanica, e dalla (12)

$$(12') \qquad (a \times b \wedge c)^2 = a^2 b^2 c^2 - a^2 (b \times c)^2 - b^2 (c \times a)^2 - c^2 (a \times b)^2 + \\ + 2 (b \times c \cdot c \times a \cdot a \times b)$$

che dà il volume di un parallelepipedo, del quale sono note le lunghezze degli spigoli e i mutui angoli da essi formati.

Dimostriamo ora le formule (8) - (12').

Se i vettori a, b, c, d sono complanari, allora la (8) è vera perchè i prodotti misti sono tutti nulli. Se, ad es., a, b, c non sono complanari, allora esistono i numeri x, y, z, m con $m \neq 0$, e tali che

$$xa + yb + zc + md = 0.$$

Moltiplicando scalarmente, e successivamente, per $b \wedge c$, $c \wedge a$, $a \wedge b$ ricaveremo x, y, z espressi per m: ad es.,

$$xa \times b \wedge c + md \times b \wedge c = 0;$$

sostituendo i valori trovati di x, y, z, si ottiene precisamente la (8) e con facili trasformazioni anche la (8').

(1) A. Pensa, *Sulla risoluzione di equazioni vettoriali ed omogenee* (Atti, Acc. Torino, vol. 49, 1913-14). A. Guglielmi, *Prodotto di due prodotti vettoriali misti* (Bollettino della « Mathesis », a. XI, 1919).

Se a, b, c sono complanari, allora si può porre $c = ma + nb$ e la (9) è vera perchè si ha

$$u \times (a \cdot b) \times c + (u \times b \cdot c) \times a + (u \times c \cdot a) \times b =$$
$$m(u \times a \cdot b) \times a + n(u \times b \cdot b) \times a + m(u \times a) \times b + n(u \times b) \times a \times b = 0.$$

Se, invece a, b, c non sono complanari, allora anche i vettori $b \times c$, $c \times a$, $a \times b$ non sono complanari e si ha

$$u = xb \times c + yc \times a + za \times b;$$

moltiplicando internamente $\times u$ per a, b, c, rispettivamente, si ha

$$u \times a = xa \times b \times c, \quad u \times b = yb \times c \times a, \quad u \times c = zc \times a \times b$$

e quindi, per le (5), (6), risulta vera la (9).

Per dimostrare le (10), (11), basta osservare che per formule note si ha

$$(a \times b) \times (u \times v) = a \times (u \times v) \cdot b - b \times (u \times v) \cdot a, \text{ ecc.},$$
$$(a \times b) \times (u \times v) = a \times [b \times (u \times v)] = \text{ecc.}$$

Se teniamo conto delle (8'), (11), si ha

$$a \times b \times c \cdot u \times v \times w = [a \times b \times c \cdot v \times w] \times u$$
$$[(v \times w) \times (b \times c) \cdot a + (v \times w) \times (c \times a) \cdot b + (v \times w \times a \times b) \cdot c] \times u$$
$$a \times u \cdot \begin{vmatrix} b \times v & b \times w \\ c \times v & c \times w \end{vmatrix} + \ldots + \ldots$$

che è appunto il determinante secondo membro della (12).

d) In particolare per un sistema *cartesiano* i, j, k cioè tale che $i^2 = j^2 = k^2 = 1$, $i \times j \times k \neq 0$ e per un vettore qualunque u si ha dalle (8'), (9)

$$(13) \qquad u = \frac{1}{i \times j \times k} [u \times j \times k \cdot i + u \times k \times i \cdot j + u \times i \times j \cdot k]$$

$$(14) \qquad u = \frac{1}{i \times j \times k} [u \times i \cdot j \times k + u \times j \cdot k \times i + u \times k \cdot i \times j].$$

E se il sistema è ortogonale destrogiro, allora le (13), (14) dànno, concordi,

$$(15) \qquad u = u \times i \cdot i + u \times j \cdot j + u \times k \cdot k,$$

che è la (7) del n. 3.

e) Come ultima applicazione dei prodotti misti diamo i due teoremi seguenti.

Se $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *sono vettori unitari non complanari, allora le rette condotte da un punto* O, *arbitrario, parallelamente ai vettori* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *(le rette* Oa, Ob, Oc*), appartengono ad un cono circolare retto il cui asse è parallelo al vettore*

$$(\alpha) \qquad \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Infatti. Se tale cono circolare esiste, il suo asse deve essere parallelo al vettore unitario $\boldsymbol{u}$ tale che

$$(\alpha) \qquad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{c}.$$

Deve dunque essere

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = 0, \quad \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = 0, \quad \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0:$$

cioè $\boldsymbol{u}$ deve essere normale ai vettori $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ e quindi parallelo al vettore

$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \wedge (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Allora posto

$$(\beta) \qquad \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})\, m, \text{ con } m = \operatorname{mod}(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$$

il vettore $\boldsymbol{u}$ è unitario e soddisfa alla (α) cioè è parallelo all'asse del cono circolare retto del quale Oa, Ob, Oc sono tre generatrici.

Affinchè i vettori unitari $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, *tre qualunque dei quali non sono complanari, siano tali che, per* O *punto arbitrario, le rette* Oa, Ob, Oc, Od, *siano generatrici di uno stesso cono circolare retto è necessario e sufficiente che si abbia*

$$(\delta) \qquad \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = 0.$$

Se la retta Od appartiene al cono individuato da $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ deve essere $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}\, m$ e quindi, per la (β),

$$(\gamma) \qquad (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$$

che si pone subito sotto la forma (δ). Viceversa: se vale la (δ), vale pure la (γ) e questa esprime che $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}$, vale a dire che la retta Od appartiene al cono individuato da $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Si noti che se i vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ sono complanari e due almeno di essi non sono paralleli, allora il vettore $\boldsymbol{u}$ è normale

al piano dei vettori, la (b) è una identità e il cono si riduce ad un piano normale ad u.

5. **Proiezioni. Applicazioni alla trigonometria.** — *a*) Consideriamo una linea poligonale qualunque $ABCDE\ldots$, e sia u un vettore unitario parallelo ad una retta arbitraria. Si ha, ad es.,

$$(B-A)+(C-B)+(D-C)+(E-D)=E-A$$

e poscia

$$(B-A)\times u+(C-B)\times u+\ldots\ldots=(E-A)\times u;$$

e poichè $(B-A)\times u$ rappresenta la proiezione di AB sulla retta data con un segno determinato, così concludiamo che: *la somma algebrica delle proiezioni dei lati di una linea poligonale su di una retta qualunque, è eguale alla proiezione della congiungente l'origine con l'estremo della poligonale, ed è nulla quando la poligonale è chiusa.*

L'ordinaria teoria delle proiezioni è dunque implicitamente contenuta nell'algoritmo vettoriale dei segni $+\ -\ \times$.

b) Siano a, b, c le misure dei lati del triangolo ABC; e siano α, β, γ, in radianti, i suoi angoli interni; cioè:

$$a=\text{mod}\,(B-C);\quad \alpha=\text{ang}\,(B-A,\ C-A),\ \text{ecc.}$$

Si ha identicamente:

$$(B-A)\times(C-A)=(C-B)\times(A-B)=(A-C)\times(B-C);$$

prendendo i moduli e dividendo per abc si ha

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

Dall'identità

$$A-B=(C-A)-(C-B)$$

si ha, moltiplicando $\times$ per $C-B$,

$$(A-B)\times(C-B)=(C-A)\times(C-B)=(C-B)^2$$

e quindi, dividendo per a,

$$c\cos\beta+b\cos\gamma=a.$$

Quadrando la stessa identità abbiamo

$$(C-B)^2 = (A-B)^2 + (C-A)^2 + 2(A-B)\times(C-A)$$

ossia

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Ecco dunque ottenute le formule fondamentali della trigonometria piana.

c) Sia O il centro di una sfera di raggio unitario: A, B, C i vertici di un triangolo sferico: a, b, c i lati opposti, in radianti: e, pure in radianti, α, β, γ gli angoli. Se poniamo

$$\boldsymbol{a} = A - O, \quad \boldsymbol{b} = B - O, \quad \boldsymbol{c} = C - O:$$

si ha

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \cos a; \quad \mathrm{mod}(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = \mathrm{sen}\,\alpha; \text{ ecc.}$$

Inoltre l'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}$ è α; ecc.

Ora abbiamo

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}) = \mathrm{sen}\,c\,\mathrm{sen}\,b\cos\alpha:$$

ma, per la (11) del n. 4, il primo membro è eguale a

$$\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \cos a - \cos c\cos b:$$

quindi

$$\cos a = \cos b\cos c + \mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,c\cos\alpha:$$

che è la formula fondamentale della trigonometria sferica [1].

[1] Questo teorema si può dimostrare anche così, facendo uso del solo prodotto interno. Se M, N sono i piedi delle normali condotte da B, C alla retta OA si ha

(a) $\quad B - M = \boldsymbol{b} - \cos c\cdot\boldsymbol{a}, \quad C - N = \boldsymbol{c} - \cos b\cdot\boldsymbol{a}$

(b) $\quad \mathrm{mod}(B-M) = \mathrm{sen}\,c, \quad \mathrm{mod}(C-N) = \mathrm{sen}\,b, \quad \mathrm{ang}(B-M, C-N) = \alpha$

e quindi dal prodotto interno delle prime due si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\,c\,\mathrm{sen}\,b\cos\alpha &= \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} - \cos b\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} - \cos c\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} + \cos c\cos b\\ &= \cos a - \cos b\cos c - \cos c\cos b + \cos c\cos b\\ &= \cos a - \cos b\cos c\end{aligned}$$

da cui si ricava subito la formula considerata.

Si può far uso delle (a), (b) anche per dimostrare il teorema dei

d) Se si osserva che, per la (10) del n. 4,

$$(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = a \times b \wedge c \cdot a$$

risulta

$$(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) \times a = (b \wedge c) \wedge (b \wedge a) \times b = (c \wedge a) \wedge (c \wedge b) \times c$$

e quindi

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma :$$

e infine

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} c}.$$

6. **Distanze, angoli, aree, volumi.** — *a*) La distanza di due punti A, B è data da $\operatorname{mod}(B - A)$, cioè da

$$\sqrt{(B - A) \times (B - A)} = \sqrt{(B - A)^2}.$$

b) Per l'angolo formato dai due vettori a, b abbiamo

$$\cos(a, b) = \frac{a \times b}{\operatorname{mod} a \cdot \operatorname{mod} b} :$$

quindi, se i punti A, B, C, D determinano due rette AB, CD il coseno di uno degli angoli φ formati dalle due rette è

$$\cos \varphi = \frac{(B - A) \times (D - C)}{\operatorname{mod}(B - A) \cdot \operatorname{mod}(D - C)}.$$

c) Uno degli angoli formati dalla retta AB col piano CDE è il complemento dell'angolo formato dai vettori $B - A$ e

seni [cfr. *d*)], ma occorre il prodotto vettoriale. Si ha infatti dalle (*a*)

$$(B - M) \wedge (C - N) \times a = a \times b \wedge c :$$

ma $(B - M) \wedge (C - N)$ è vettore parallelo ad a e quindi per le (*b*)

$$(B - M) \wedge (C - N) \times a = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \alpha :$$

cambiando l'ordine, con rotazione, di a, b, c, si ha

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma . \qquad \text{c. d. d.}$$

$(D - C) \setminus (E - C)$; la formula precedente da il seno di tale angolo; cioè

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{(B - A) \times (D - C) \setminus (E - C)}{\operatorname{mod}(B - A) \cdot \operatorname{mod}\{(D - C) \setminus (E - C)\}}.$$

d) Analogamente, per uno degli angoli φ formati dai due piani ABC, DEF si ha

$$\cos \varphi = \frac{\{(B - A) \setminus (C - A)\} \times \{(E - D) \setminus (F - D)\}}{\operatorname{mod}\{(B - A) \setminus (C - A)\} \cdot \operatorname{mod}\{(E - D) \setminus (F - D)\}}.$$

e) Dalla stessa definizione dell'operazione $\setminus$ risulta subito che

$$\text{« area triangolo } ABC \text{ »} = \frac{1}{2} \operatorname{mod}\{(B - A) \setminus (C - A)\}.$$

f) Se $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sono vettori, si è già visto [cfr. (7) del n. 4] che $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \setminus \boldsymbol{c}$ è il volume, con un segno, del parallelepipedo costruito con i tre vettori, in conseguenza il volume, con un segno, del tetraedro di vertici A, B, C, D è

$$\operatorname{Vol}(A, B, C, D) = \frac{1}{6}(B - A) \times (C - A) \setminus (D - A).$$

Siccome

$$C - A = (C - D) - (A - D)$$

e

$$(C - A) \setminus (D - A) = (C - D) \setminus (D - A);$$

tale volume viene anche espresso da

$$\operatorname{Vol}(A, B, C, D) = \frac{1}{6}(B - A) \times (C - D) \setminus (D - A);$$

cioè mediante due spigoli opposti ed uno dei rimanenti lati.

Si può far vedere che tale volume non varia dando ad A e B una stessa traslazione $\boldsymbol{u}$ lungo AB, ed a C e D una stessa traslazione $\boldsymbol{v}$ lungo CD. Infatti $B - A$, $C - D$ non variano; $D - A$ diventa

$$(D + v) - (A + u) = (D - A) + m(C - D) - n(A - B).$$

Moltiplicando vettorialmente per $C - D$ e poi per $B - A$ scalarmente, il prodotto misto primitivo non risulta alterato.

h) La distanza del punto A dalla retta BC è

$$\frac{\operatorname{mod}\{(B - A) \times (C - A)\}}{\operatorname{mod}(B - C)}.$$

k) La distanza, con segno, del punto A dal piano BCD è

$$\frac{(B - A) \times (C - A) \times (D - A)}{\operatorname{mod}\{(C - B) \times (D - B)\}}.$$

i) Se O è un punto del piano BCD ed u un vettore unitario normale al piano, allora la distanza di A dal piano, sempre con un segno, è, più semplicemente,

$$(A - O) \times u.$$

j) Finalmente la distanza, con un segno, delle due rette generiche AB, CD è

$$\frac{(C - A) \times (B - A) \times (D - C)}{\operatorname{mod}\{(B - A) \times (D - C)\}}.$$

Infatti: senza toglier nulla alla generalità (vedi sopra), possiamo supporre che AC sia la normale comune alle due rette: allora il numeratore rappresenta il volume del parallelepipedo di altezza AC e la cui base ha per area $\operatorname{mod}\{(B - A) \times (D - C)\}$. Oppure, più semplicemente, considerando la distanza di C dal piano dei tre punti A, B, $A + (D - C)$.

7. Coordinate cartesiane ortogonali. — *a*) Riferiamoci alle notazioni e convenzioni del n. 3, *d*), rispetto al solito sistema ortogonale i, j, k. Se ai vettori

$$u = ai + bj + ck, \quad u' = a'i + b'j + c'k,$$
$$u'' = a''i + b''j + c''k,$$

si applicano le regole, già esposte, del calcolo vettoriale e si

tien conto delle relazioni del n. 3, d, si hanno facilmente le formule

$$u \wedge u' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = (bc' - b'c)\,i + (ca' - c'a)\,j + (ab' - a'b)\,k$$

$$u \times u' = aa' + bb' + cc'$$

$$\operatorname{mod} u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$u \times u' \wedge u'' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\cos(u, u') = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}:$$

e infine

$$\cos(u, i) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}:\ldots.$$

La identità geometrica (11') del n. 4 per i due vettori u, u' si traduce in quest'altra, dovuta ad Eulero, della quale è difficile vedere il significato geometrico

$$(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2 =$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2.$$

b) Il punto

$$P = O + xi + yj + zk$$

sta sul piano condotto per

$$P_0 = O + x_0 i + y_0 j + z_0 k,$$

normalmente al vettore u, solamente quando

$$(P - P_0) \times u = 0:$$

cioè solamente quando

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Dunque il piano di equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

è normale al vettore

$$ai + bj + ck:$$

abbiamo così il significato geometrico dei numeri a, b, c.

Le formule di a) dànno gli angoli di due rette, di due piani, di una retta e di un piano, ecc. In generale gli ordinari problemi della geometria cartesiana si *risolvono geometricamente*, ricavando dalle equazioni gli elementi *punto* e *vettore* che individuano gli enti coi quali si vuole operare.

Come esempio ricaviamo dalla espressione generale, già trovata, della minima distanza di due rette AB, CD, la minima distanza δ delle due rette di equazioni

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}; \quad \frac{x-x_0'}{a'} = \frac{y-y_0'}{b'} = \frac{z-z_0'}{c'}.$$

Si può porre

$$A = O + x_0 i + y_0 j + z_0 k, \quad C = O + x_0' i + y_0' j + z_0' k.$$
$$B = A + ai + bj + ck, \quad D = C + a'i + b'j + c'k:$$

sostituendo nell'ultima formula del n. 6 si ha subito

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} x_0 - x_0' & y_0 - y_0' & z_0 - z_0' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}}{\sqrt{(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2}}.$$

e) Sia i', j', k' un altro sistema destrogiro ortogonale. Si ha:

$$i' = a_{11} i + a_{12} j + a_{13} k$$
$$j' = a_{21} i + a_{22} j + a_{23} k$$
$$k' = a_{31} i + a_{32} j + a_{33} k.$$

I numeri a_{rs} sono i coseni degli angoli che i nuovi vettori fanno coi primi.

Si deduce subito che

$$i' \setminus j' \times k' = 1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dovendo essere $i' \wedge j' \wedge k'$, ecc., risulta che ogni elemento del determinante precedente è eguale al suo complemento algebrico; quindi si avrà:

$$
\begin{aligned}
i &= a_{11}i' + a_{21}j' + a_{31}k' \\
j &= a_{12}i' + a_{22}j' + a_{32}k' \\
k &= a_{13}i' + a_{23}j' + a_{33}k' ;
\end{aligned}
$$

abbiamo cioè l'ordinaria *trasformazione di coordinate ortogonali in coordinate ortogonali.*

CAPITOLO III.

Calcolo baricentrico.

1. Definizione delle forme di prima specie. $\mathbf{F}_1$: forme eguali: forma nulla. — *a*) Se x_i, per $i = 1, 2, \ldots, n$, è una successione di numeri reali e A_i una successione di punti, con la notazione, attualmente priva di significato,

$$(1) \qquad x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n \quad \text{o brevemente,} \quad \sum_1^n x_i A_i ,$$

indichiamo quell'operatore a sinistra fra *terne di punti* e *numeri reali*, tale che

$$(2) \qquad \left(\sum_1^n x_i A_i\right) P, Q, R) = \sum_1^n x_i \operatorname{Vol}(A_i, P, Q, R)$$

qualunque siano i punti P, Q, R.

L'operatore (1) è univocamente determinato, come funzione delle due successioni x_i, A_i, perchè, il secondo membro della (2) è numero univocamente determinato qualunque siano i punti P, Q, R.

Gli operatori (1) si chiamano, seguendo PEANO, *forme geometriche di prima specie*, brevemente $\mathbf{F}_1$.

Indicheremo spesso una $\mathbf{F}_1$ con una sola lettera. Dicendo « S è una $\mathbf{F}_1$ » intendiamo dire « esistono due successioni x_i, A_i, per $i = 1, 2, \ldots, n$, la prima di numeri reali, la seconda di punti, tali che « $S = \sum_1^n x_i A_i$ ». In tali ipotesi la notazione $S(P, Q, R)$ ha lo stesso significato del primo membro della (2).

b) Alla condizione di eguaglianza di due $\mathbf{F}_1$ espresse sotto la forma (1), si dà forma geometrica semplicissima mediante i vettori.

Se S, S' sono delle $\mathbf{F}_1$ *tali che*

$$(a) \qquad S = \sum_1^n x\, A, \quad S' = \sum_1^m y\, B,$$

allora si ha

$$(3) \qquad S = S', \quad \text{cioè} \quad \sum_1^n x\, A = \sum_1^m y\, B,$$

solamente quando

$$(4) \qquad \sum_1^n x\, (A - O) = \sum_1^m y\, (B - O),$$

qualunque sia il punto O.

Infatti. La (3) vale, solo quando,

$$(5) \qquad S\,(O, P, Q) = S'\,(O, P, Q)$$

comunque si fissino i punti O, P, Q, cioè, per la (2), solo quando [cfr. Cap. II, n. 6]

$$\sum_1^n x\, (A - O) \times (P - O) \wedge (Q - O) = \sum_1^m y\, (B - O) \times (P - O) \wedge (Q - O):$$

trasportando nel primo membro e ponendo in evidenza il vettore $(P - O) \wedge (Q - O)$,

$$\left(\sum_1^n x\, (A - O) - \sum_1^m y\, (B - O) \right) \times (P - O) \wedge (Q - O) = 0$$

che per essere $(P - O) \wedge (Q - O)$ vettore arbitrario, e indipendente da O, perchè i punti O, P, Q sono arbitrari, dimostra la (4).

c) Diremo che S è una $\mathbf{F}_1$ *nulla* quando

$$(6) \qquad S\,(P, Q, R) = 0$$

comunque si fissino i punti P, Q, R.

Esiste almeno una $\mathbf{F}_1$ nulla, ad es., $1\,\mathbf{A}_1 + (-1)\,\mathbf{A}_1$: per le (5), (6) due $\mathbf{F}_1$ nulle sono identiche e quindi: *esiste una sola* $\mathbf{F}_1$ *nulla.*

La $\mathbf{F}_1$ nulla si indicherà col simbolo 0, *zero.*

Ripetendo il ragionamento fatto per dimostrare la (4) si ha subito che:

$$(7) \qquad S = 0, \quad \text{cioè} \quad \sum (A - O) = 0$$

solamente quando

$$(8) \qquad \sum_{1}^{n} e_i A = O \quad (0),$$

qualunque sia il punto O.

2. **Algoritmo delle $\mathbf{F}_1$.** — Siano S, S' delle $\mathbf{F}_1$ e h un numero reale.

Chiameremo « somma di S con S' » e la indicheremo con $S + S'$, e « prodotto di S per h » e la indicheremo con hS, ovvero Sh, la $\mathbf{F}_1$, rispettivamente, tale che

$$(1) \qquad \begin{cases} (S + S')(P, Q, R) = S(P, Q, R) + S'(P, Q, R) \\ (hS)(P, Q, R) = h\{S(P, Q, R)\} \end{cases}$$

qualunque siano i punti P, Q, R.

Da questa definizione e da quelle del n. 1 risulta facilmente che: se S, S', S'' sono delle $\mathbf{F}_1$ e h, k sono numeri reali, allora

$$(2) \qquad \begin{cases} S + S', \quad hS \text{ sono delle } \mathbf{F}_1 \text{ univocamente determinate} \\ S + S' = S' + S, \quad S + (S' + S'') = (S + S') + S \\ h(S + S') = hS + hS', \quad (h + k)S = hS + kS \\ h0 = 0, \quad 0S = 0 \\ \text{da } hS = 0 \text{ segue } h = 0 \text{ ovvero } S = 0. \end{cases}$$

Se si conviene di porre, come in Algebra, per $h \neq 0$,

$$(3) \qquad -S = (-1)S, \quad S - S' = S + (-S'), \quad \frac{S}{h} = \frac{1}{h}S$$

allora si ha che: ***tutto l'algoritmo algebrico delle operazioni +, —, prodotto e quoto per un numero reale, è applicabile alle $\mathbf{F}_1$.***

Ammettiamo ancora che: *un punto A qualsiasi è operatore tra terne di punti e numeri reali, tale che*

$$A(P, Q, R) = \text{Vol } A, P, Q, R$$

qualunque siano i punti P, Q, R. Da ciò risulta che $1A = A$, o in generale che: *ogni punto (proprio) è una* $\mathbf{F}_1$. Ma, come vedremo, esistono delle $\mathbf{F}_1$ che non sono punti.

Dalla stessa convenzione, dalla (2) del n. 1, e dalla definizione di vettore, risulta che, essendo A, B dei punti, $1B + (-1)A$ è F_1 identica al vettore $B - A$, quindi: *ogni vettore è una* F_1. Ma, come vedremo, esistono delle forme di prima specie che non sono nè vettori, nè punti [1].

Noi abbiamo considerato fin qui $x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$ come ***scrittura simbolica*** e nel n. 1 abbiamo dato significato preciso a tale scrittura, senza attribuire significato speciale alle parti x_iA_i ed al segno $+$. Ma dalle definizioni precedenti risulta ora che x_iA_i, *prodotto di un punto per un numero reale*, è una F_1 e che Σx_iA_i è proprio la somma di tali F_1. Dunque: ***tutto l'algoritmo algebrico delle operazioni*** $+$, $-$, ***prodotto e quoto per un numero reale, è applicabile ai punti.***

Sono notevoli i seguenti casi particolari dell'algoritmo delle F_1.

a) *I punti sono* F_1 *non nulle*: cioè si ha sempre $A \neq 0$ qualunque sia il punto A. Esiste infatti un punto O diverso da A per il quale $A - O \neq 0$.

b) *Il prodotto di un punto per un numero è nullo solamente quando è nullo il numero*; cioè da $hA = 0$ segue $h = 0$. Infatti: da $hA = 0$ segue $h = 0$ oppure $A = 0$: ma quest'ultimo caso è da escludere, dunque resta $h = 0$.

c) *La* F_1 *nulla è identica al vettore nullo*. Infatti: il vettore nullo è, come ogni vettore, una F_1 e poichè esiste una sola F_1 nulla ne segue che, ecc.

3. Massa e baricentro. — Si chiama *massa* di una forma di prima specie S, il numero $\sum_1^n x$, comunque si sia potuto porre $S = \sum_1^n x_iA_i$.

(1) La parte della teoria dei vettori già trattata nel Cap. I, si può ottenere come caso particolare dalle F_1. Anzi è necessario far vedere come le definizioni date nel Cap. I per i vettori concordano con quelle date per le F_1. Ad es., la somma del punto A col vettore a è appunto la F_1 tale che

$$(A + a)(P, Q, R) = A(P, Q, R) + a(P, Q, R),$$

poichè, potendosi porre $a = B - A$, il secondo membro si riduce subito a $B(P, Q, R)$. Analogamente per la *somma dei vettori*, per il *prodotto di un vettore per un numero reale*.

Facciamo subito vedere che: *la massa di una* $\mathbf{F}_1$ *è indipendente dal modo col quale la* $\mathbf{F}_1$ *stessa si esprime come somma di prodotto di punti per numeri; vale a dire che da*

$$S = \sum_1^n x_i A_i = \sum_1^m y_i B_i$$

segue sempre

$$\sum_1^n x_i = \sum_1^m y_i ,$$

e quindi che la massa di S *è una funzione di* S *soltanto.*

Posto infatti

$$x = \sum_1^n x_i , \quad y = \sum_1^m y_i$$

risulta identicamente che, qualunque sia il punto O,

$$\sum_1^n x_i A_i = xO + \sum_1^n x_i (A_i - O) , \quad \sum_1^m y_i B_i = yO + \sum_1^m y_i (B_i - O) ;$$

ma essendo verificata la (4) del n. 1, si conclude che

$$xO = yO, \quad \text{cioè} \quad x = y.$$

La trasformazione adoperata, cioè

$$S = xO + \sum_1^n x_i (A_i - O) ,$$

mette subito in vista altre notevoli proprietà.

Se $x = 0$, S è un vettore; e se $S = B - A$, la massa di S è nulla: dunque

Una $\mathbf{F}_1$ *è un vettore solamente quando la sua massa è nulla.*

Posto

$$a = \sum_1^n x_i (A_i - O),$$

risulta, per $x \neq 0$,

$$S = xO + a = x\left(O + \frac{1}{x} a\right) = xG,$$

dove G è un punto. Nè può essere in altro modo

$$S = xG',$$

perchè altrimenti

$$x(G - G') = 0$$

cioè $G = G'$: dunque

Una $\mathbf{F}_1$ *di massa non nulla è il prodotto di un punto, univocamente determinato, per la sua massa.*

In generale: *Una* $\mathbf{F}_1$ *o è un vettore o è il prodotto della sua massa per un punto, secondo che la sua massa è nulla o no.*

Chiamasi baricentro di una $\mathbf{F}_1$ di massa non nulla, il punto che si deve moltiplicare per la massa della $\mathbf{F}_1$ per ottenere la $\mathbf{F}_1$ stessa.

Quindi:

$$\text{« baricentro di } S \text{ »} = \sum_1^n x_i A_i \Big/ \sum_1^n x_i \,,$$

secondo la notazione di Möbius.

Se la massa x di $S = \sum_1^n x_i A_i$ non è nulla, G è il baricentro di S e O è un punto arbitrario, si ha identicamente

$$x(G - O) = \sum_1^n x_i (A_i - O)$$

e se u è vettore unitario si ha, pure identicamente

$$x(G - O) \times u = \sum_1^n x_i (A_i - O) \times u \,;$$

ma $(G - O) \times u$, $(A_i - O) \times u$ sono le distanze, con un segno, di G e A_i dal piano uscente da O e normale ad u, e quindi la formula precedente esprime che: *la somma dei prodotti delle distanze, con un segno, dei punti* A_i *da un piano, per i numeri* x_i, *è il prodotto di* $\sum_1^n x_i$ *per la distanza del baricentro* G *dei punti* A_i *con le masse* x_i *dallo stesso piano.* G è dunque il centro delle *medie distanze* dei punti A_i dal piano. Se poi effettivamente i punti A_i sono punti materiali di masse rispettive m_i, il punto G coincide col *centro di massa* di questi punti.

4. Costruzioni grafiche. — Il baricentro di

$$x_1 A_1 + x_2 A_2,$$

essendo

$$x = x_1 + x_2 \neq 0,$$

si può costruire in modo assai semplice. Infatti è identicamente

$$G = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{x} = A_1 + \frac{x_2}{x}(A_2 - A_1) = A_2 - \frac{x_1}{x}(A_2 - A_1),$$

da cui risulta che *G sta sulla retta $A_1 A_2$*. Se quindi costruiamo i punti

$$B_1 = A_1 + x_2 \boldsymbol{i}, \quad B_2 = A_2 - x_1 \boldsymbol{i},$$

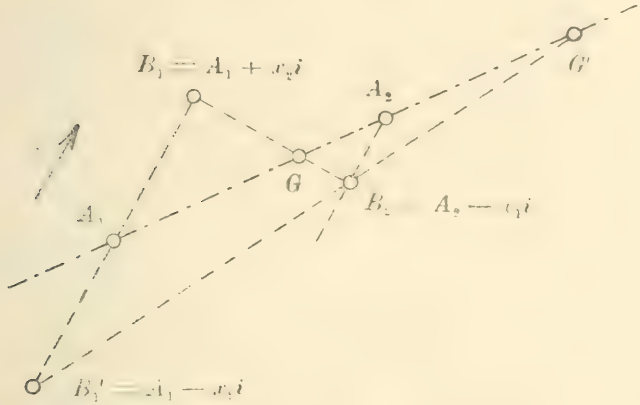

Fig. 15

essendo $\boldsymbol{i}$ un vettore qualunque non parallelo ad $A_2 - A_1$, risulta

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 = x_1 A_1 + x_2 A_2 ;$$

cioè: costruiti i punti B_1 e B_2, la retta $B_1 B_2$ taglia $A_1 A_2$ nel baricentro cercato G.

Se $x_1 - x_2 \neq 0$, e B_1' è il simmetrico di B_1 rispetto ad A_1, la retta $B_1' B_2$ taglia $A_1 A_2$ nel baricentro G' di $x_1 A_1 - x_2 A_2$.

Il gruppo $A_1 A_2 G G'$ è *armonico*.

È poi chiaro che le distanze, con un segno, di G da A_1 e A_2 sono inversamente proporzionali alle masse x_1, x_2 dei punti A_1, A_2: quindi G è il punto di applicazione della risultante di due forze parallele, di intensità x_1 e x_2, rispettivamente applicate in A_1 e A_2. Ciò prova l'importanza meccanica delle $\mathbf{F}_1$.

La costruzione del vettore, o baricentro, di $\sum_1^n x_i A_i$ si può fare applicando successivamente la costruzione precedente: o

meglio, facendo uso della identità

$$\sum_1^n x\,A = xO + \sum_1^n x\,A - O,$$

e scegliendo O in modo conveniente nei vari casi particolari.

Se i punti A stanno tutti su di una retta, o su di un piano, anche G sta sulla retta, o sul piano.

5. Alcune applicazioni alla Geometria elementare. — *a*) Il punto medio tra A e B è $\frac{A+B}{2}$.

La condizione $B - A = D - C$ equivale, per le solite leggi algebriche, alla condizione (Cap. I, n. 1)

$$\frac{A+D}{2} = \frac{B+C}{2}.$$

Se A, B, C sono, in quest'ordine, tre vertici di un parallelogrammo, il vertice opposto a B è $A + C - B$.

Il *simmetrico* di A rispetto ad O è $2O - A$.

Dalle identità

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{A + 2\,\frac{B+C}{2}}{3} = \frac{B + 2\,\frac{C+A}{2}}{3}, \text{ ecc.}$$

risulta che G notoriamente centro di gravità dell'area è il punto comune alle tre mediane del triangolo ABC e queste si tagliano ai 2/3 della loro lunghezza dal vertice.

Si possono egualmente interpretare le identità

$$\frac{A+B+C+D}{4} = \frac{2\,\frac{A+B}{2} + 2\,\frac{C+D}{2}}{4} = \ldots\ldots \frac{A + 3\,\frac{B+C+D}{3}}{4}.$$

b) Siano A, B, C i vertici di un triangolo: a, b, c, le lunghezze dei lati rispettivamente opposti. Il punto

$$P = A + x\left(\frac{B-A}{c} + \frac{C-A}{b}\right) = \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{x}{b}\right)A + \frac{x}{c}B + \frac{x}{b}C,$$

sta sulla bisettrice interna, o esterna, dell'angolo in A, secondo

che si prende il segno + o il —. Tale punto stara sul lato BC, quando

$$1 - \frac{x}{c} + \frac{x}{b} = 0,$$

donde

$$x = \frac{bc}{b+c},$$

con $b \neq c$ nel caso del : e risulta dimostrato che: *la bisettrice divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti.*

Se poniamo

$$2p = a + b + c,$$

segue che il baricentro H di $aA + bB + cC$, cioè

$$H = \frac{aA + bB + cC}{2p} = \frac{a}{2p}A + \frac{1}{2p}(bB + cC) \quad \ldots\ldots,$$

è il punto comune alle bisettrici interne. I baricentri di

$$-aA + bB + cC, \quad aA - bB + cC, \quad aA + bB - cC$$

sono i centri degli ex-cerchi.

I punti d'incontro delle bisettrici esterne con i lati opposti sono collineari. Questi punti sono, infatti, baricentri delle formazioni

$$bB - cC, \quad cC - aA, \quad aA - bB,$$

la cui somma è nulla.

Il centro di gravità o *centro di massa* del perimetro del triangolo ABC è il punto

$$K = \frac{a\frac{B+C}{2} + b\frac{C+A}{2} + c\frac{A+B}{2}}{2p};$$

cioè *è il punto comune alle bisettrici interne del triangolo i cui vertici sono i punti medi dei lati del triangolo.*

Si ha facilmente:

$$K = \frac{1}{2p}\left(\left(p - \frac{a}{2}\right)A + \left(p - \frac{b}{2}\right)B + \left(p - \frac{c}{2}\right)C\right) = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H:$$

relazione assai semplice tra i punti collineari G, H, K.

c) Costruire un quadrilatero (piano o gobbo) essendo dati i baricentri dei quattro triangoli che si possono ottenere con i suoi vertici.

Siano X_1, X_2, X_3, X_4 i vertici del quadrilatero; G_1, G_2, G_3, G_4 i baricentri dati e G il baricentro dei quattro punti G con massa 1. Si ha:

$$X_2 + X_3 + X_4 = 3G_1, \quad X_3 + X_4 + X_1 = 3G_2$$
$$X_4 + X_1 + X_2 = 3G_3, \quad X_1 + X_2 + X_3 = 3G_4$$

e ancora

$$G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = 4G.$$

Sommando le quattro precedenti si ha

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4G;$$

dunque

$$X_1 = 4G - 3G_1 = G + 3(G - G_1);$$

e così per gli altri vertici, che possono quindi costruirsi assai semplicemente.

6. Coordinate. — *a*) Se O, i, j, k è un sistema cartesiano di riferimento, ed S è una $\mathbf{F}_1$, si ha, in un sol modo,

$$S = mO + xi + yj + zk,$$

essendo m la massa di S. I numeri reali m, x, y, z sono le *coordinate* di S, rispetto al sistema di riferimento.

Se si ha

$$S = \sum_1^n m_r A_r; \quad m = \sum_1^n m_r;$$
$$A_r = O + x_r i + y_r j + z_r k,$$

allora

$$x = \sum_1^n m_r x_r, \quad y = \sum_1^n m_r y_r, \quad z = \sum_1^n m_r z_r.$$

Per $m \neq 0$ le coordinate del baricentro di S sono

$$\sum_1^n m_r x_r \Big/ \sum_1^n m_r, \text{ ecc.....}$$

b) Se A_1, A_2, A_3, A_4 sono punti non complanari e P

un punto qualunque, sono univocamente determinati i quattro numeri x_i tali che

$$P = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4,$$

con

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Infatti

$$P = A_1 + m_1(A_2 - A_1) + m_2(A_3 - A_1) + m_3(A_4 - A_1).$$

I quattro numeri x_i sono le *coordinate baricentriche assolute* [1] di P rispetto al sistema A.

Per un vettore u si ha

$$u = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4$$

con

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Nel piano si ha

$$P = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1:$$

e sulla retta

$$P = x_1 A_1 + x_2 A_2$$
$$x_1 + x_2 = 1.$$

c) Ai punti A si possono sostituire delle $\mathbf{F}_1$, non tutte vettori, e la somma dei numeri x può essere qualunque. Si ottengono così le *coordinate proiettive* (dette di FIEDLER, ma dovute realmente a GRASSMANN) facendo rappresentare alle $\mathbf{F}_1$ i punti *propri* (baricentri) o i *punti all'infinito* (direzioni) secondo che sono di massa non nulla o nulla.

[1] È più opportuno far uso delle *coordinate baricentriche omogenee*, cioè considerare [cfr. Appendice alla Parte I, n. 12] il punto proiettivo *posizione* della $\mathbf{F}_1$

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4,$$

le x non avendo, necessariamente, per somma *uno* o *zero* [cfr. C. BURALI-FORTI, *Fondamenti per la geometria del triangolo*, D. Capozzi, Palermo, 1919, e S. Lattes, Torino].

CAPITOLO IV.

Rotazioni in un piano.

I vettori che si considerano in questo Capitolo sono quelli normali ad un vettore unitario u, da fissarsi ad arbitrio: cioè quelli paralleli ad un piano normale alla direzione di u. I punti saranno quelli di un piano normale ad u, e che resta fissato assegnandone un punto. Le rotazioni che consideriamo sono dunque fatte intorno ad assi paralleli ad u.

1. **Rotazione di un angolo retto.** — *a*) Qualunque sia il vettore x normale ad u, porremo

$$ix = x \setminus u = u \setminus x. \tag{1}$$

Risulta che: ix ha la stessa *lunghezza* di x; ha *direzione* normale ad x ed u: ha *verso* tale che, *una persona con i piedi nel punto O, con la testa in $O + u$ e che guarda nella direzione e verso di x, vede $O + ix$ alla sua sinistra* [1].

Dunque i è un *simbolo di funzione*, o un *operatore*, che fa ruotare di un angolo retto, e in un verso determinato, ogni vettore normale ad u a cui sia applicato.

[1] Supposto che la persona, con i piedi nel punto O e la testa nel punto $O + u$, abbia la posizione *verticale* usuale (testa in alto), allora essa vedrà il punto $O + x$ andare ad assumere la posizione $O + ix$, quando $O + x$ *ruoti* (un quarto di giro) *in senso inverso a quello delle lancette di un orologio* (situato in un piano orizzontale e del quale la persona *vede* la mostra). Se, invece, si definisce ix ponendo $ix = u \setminus x$ la predetta rotazione avviene in senso contrario (concorde con quello delle lancette dell'orologio) e il punto $O + ix$ è visto dall'osservatore alla sua *destra*. È, naturalmente, in nostro arbitrio la scelta delle due definizioni, ora indicate, di ix.

b) Applicando successivamente l'operatore i al vettore x e ponendo

$$i^2 x = i\,ix, \text{ ecc.},$$

si ha

$$i^2 x = -x, \quad i^3 x = -ix, \quad i^4 x = x$$

perchè, per proprietà già note,

$$i^2 x = i(ix) = (x \wedge u) \wedge u = x \times u \cdot u - u^2 \cdot x = -x$$
$$i^3 x = i\,i^2 x = (-x) \wedge u = -(x \wedge u) = -ix$$
$$i^4 x = i\,i^3 x = (-ix) \wedge u = -ix \times u = x.$$

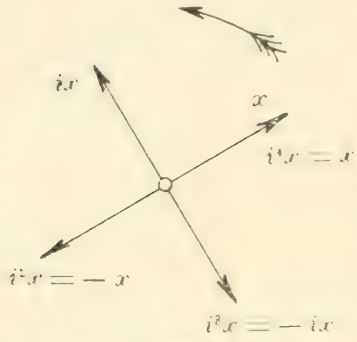

Fig. 16

Ovvero, sotto altra forma, sebbene non precisa,

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1;$$

e quindi i gode, *rispetto alle potenze*, delle proprietà del simbolo algebrico $\sqrt{-1}$ [4].

c) Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono vettori normali ad $\boldsymbol{u}$, ed m è un numero reale, le proprietà fondamentali dell'operatore i sono espresse dalle formule seguenti:

2) $\quad m\,i\boldsymbol{a} = i\,m\boldsymbol{a}; \qquad i(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = i\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b};$

3) $\quad i\boldsymbol{a} \times (i\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}; \qquad i(\boldsymbol{a} \wedge i\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b};$

4) $\quad \boldsymbol{a} \times i\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times i\boldsymbol{a}; \qquad \boldsymbol{a} \wedge i\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \wedge i\boldsymbol{a};$

5) $\quad \boldsymbol{a} \times i\boldsymbol{a} = 0; \qquad \boldsymbol{a} \wedge i\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{u};$

6) $\quad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times i\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{b} \times i\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}.$

[4]) Nel simbolo i non si conserva traccia del vettore $\boldsymbol{u}$ dal quale l'operatore i dipende; quindi la notazione è incompleta. Volendo una notazione completa si può far uso di quella di HAMILTON, $I_{\boldsymbol{u}}$; però operando in un solo piano non è necessario il farlo. — È chiaro che dovendo considerare un operatore analogo ad i per un altro vettore $\boldsymbol{v}$ diverso da $\boldsymbol{u}$, si dovrà far uso di un segno diverso da i, ad es., j perchè per $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ è certamente $i \neq j$. — È dunque erroneo identificare, come si fa talvolta, i a $\sqrt{-1}$, ed è erroneo sia perchè i è simbolo *relativo* ad $\boldsymbol{u}$, mentre $\sqrt{-1}$ è simbolo *assoluto*; sia perchè posto $i = \sqrt{-1}$, dovrà pure essere, $j = \sqrt{-1}$ e quindi $i = j$ anche quando $i \neq j$.

E si dimostrano tutte agevolmente ricorrendo alla definizione (1).

Così abbiamo

$$m(ia) = m(a \times u) = (ma) \times u = i(ma);$$

e analogamente per la 2' delle (2).

Per le (3), ricordando le (10) e (11) del n. 4 capitolo II, abbiamo:

$$(ia) \times (ib) = (a \times u) \times (b \times u) = u^2 \cdot a \times b = a \times u \cdot b \times u = a \times b;$$

$$(ia) \times (ib) = (a \times u) \times (b \times u) = a \times b \times u \cdot u$$

$$= a \times b \times u \cdot u = a \times b$$

perchè a e b sono normali ad u, e quindi $a \times b$ è parallelo al vettore u.

Le (4) e (5) sono evidenti allo stesso modo, e così la (6).

Osserviamo che le (2) esprimono che i è *commutabile col prodotto per un numero e distributivo rispetto alla somma*, cioè è un *operatore lineare*. Le (3) esprimono che il prodotto interno e vettoriale non mutano facendo ruotare i due fattori di un angolo retto. La (6) poi è notevole perchè esprime il prodotto vettoriale di a per b mediante il prodotto interno di uno dei due vettori per l'altro ruotato di un angolo retto e per mezzo del vettore u.

d) Sono interessanti le identità seguenti, ove a, b, c, x, y sono vettori normali ad u (cioè complanari) e che corrispondono ad alcune delle identità *c*) del n. 4 del Capitolo II [le (8), (8'), (9), (12)]

$$b \times ic \cdot a + c \times ia \cdot b + a \times ib \cdot c = 0, \tag{7}$$

ovvero sotto altra forma

$$a \times ib \cdot x = x \times ib \cdot a + x \times ia \cdot b \tag{7'}$$

che per a, b non paralleli (cioè $a \times ib \neq 0$) esprime x linearmente mediante a e b.

$$a \times ib \cdot x = x \times a \cdot ib - x \times b \cdot ia \tag{8}$$

che per a, b non paralleli esprime x linearmente mediante ia ed ib.

$$a \times ib \cdot x \times iy = \begin{vmatrix} a \times x & a \times y \\ b \times x & b \times y \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Le (7-9) possono dimostrarsi direttamente (come il lettore può fare per esercizio), ovvero possono ricavarsi dalle corrispondenti formule del Cap. II, n. 4, *c*), come ora facciamo, a titolo di esempio, per la (7). Per i vettori a, b, c, u si ha l'identità

$$b \times c \cdot u \cdot a - c \times a \cdot u \cdot a \cdot b + a \times a \cdot b \cdot c - a \times b \cdot c \cdot u = 0;$$

osservando che $a \times b \cdot c = 0$, perchè i vettori a, b, c sono complanari, e ricordando che $c \cdot u = ic$, per la definizione di i, si ha

$$b \times ic \cdot a + c \times ia \cdot b + a \times b \cdot u \cdot c = 0$$

che dà subito la (7). Analogamente per le altre.

e) In particolare per un sistema cartesiano i, j nel piano e per un vettore x qualunque del piano stesso, si ha dalle (7), (8),

$$x = \frac{1}{i \times ij} \{ x \times ij \cdot i + x \times ii \cdot j \} \tag{10}$$

$$x = \frac{1}{i \times ij} \{ x \times i \cdot ij - x \times j \cdot ii \}. \tag{11}$$

Se il sistema è ortogonale destrogiro, cioè

$$j = ii \quad \text{e quindi} \quad ij = -i,$$

allora le (10), (11) dànno, concordi, la nota identità

$$x = x \times i \cdot i + x \times ii \cdot ii. \tag{12}$$

2. **Complessi e loro algoritmo.** — Se m ed n sono numeri reali, qualunque sia il vettore x normale ad u, porremo

$$(m + in)x = mx + nix. \tag{1}$$

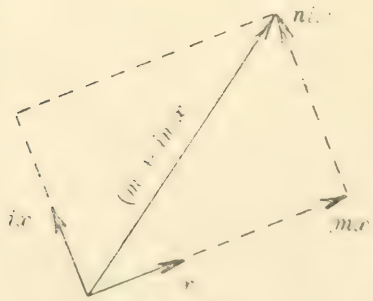

Fig. 17

Risulta che $m + in$ è un *simbolo di funzione*, un *operatore*, che, applicato ad un vettore x normale ad u, produce un vettore pure normale ad u, e facilmente costruibile come somma dei prodotti di x e ix per i numeri m ed n.

L'operatore $m + in$ chiamasi (numero *complesso*, o numero *immaginario*, del quale m e in sono, rispettivamente, la *parte reale* e la *parte immaginaria*.

I complessi sono *operatori lineari*, vale a dire se α è un complesso, h un numero reale, a e b vettori normali ad u, si ha

$$h\alpha a = \alpha ha, \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$$

come immediatamente si verifica dando ad α la forma $m + in$.

Si ha, tenuto conto del campo di applicabilità di α e β, che

$$\alpha = \beta$$

solamente quando, per qualunque vettore x, normale ad u,

$$\alpha x = \beta x.$$

Quindi

$$m + in = m' + in'$$

solamente quando

$$m = m', \quad n = n'.$$

Si dice che il complesso α è nullo, quando

$$\alpha x = 0,$$

qualunque sia x normale ad u. Dunque, *esiste un solo complesso nullo*, che si indicherà con 0 (zero) [1].

[1] Come abbiamo osservato nella nota del n. 7 Cap. I, il prodotto del vettore x per il numero reale m deve, a rigore, essere indicato mediante un simbolo di operazione. Se, ad es., $\bigcirc$ è tale simbolo allora è

$$m \bigcirc x, \quad \text{e non} \quad mx,$$

la notazione che indica il *prodotto del vettore x per il numero reale m*. Viene come conseguenza che

$$(m + in) x = m \bigcirc x + n \bigcirc ix$$

e quindi, in particolare, essendo 0 (zero) il numero reale nullo, e non altro, si ha

$$(m + i0) x = m \bigcirc x, \quad (0 + i0) x = 0 \bigcirc x$$

da cui risulta

$$m + i0 = m \bigcirc, \quad 0 + i0 = 0 \bigcirc$$

e non, come si ottiene sempre, $m + i0 = m$, $0 + i0 = 0$ che sono eguaglianze erronee. Pure noi abbiamo seguito l'uso comune, non introducendo il simbolo (ad es., $\bigcirc$) di prodotto di un vettore per un numero, poichè, almeno in generale, non si presentano inconvenienti formali notevoli; ma è necessario che il lettore tenga ben presente quanto abbiamo ora detto.

Si ha

$$m + in = 0$$

soltanto quando

$$m = n = 0.$$

Un numero reale opera sui vettori normali ad u come un complesso la cui parte immaginaria è nulla, vale a dire si ha

$$(m + i0)x = mx \text{ [1]}.$$

Se α, β sono complessi, con $\alpha \neq \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ per $\beta \neq 0$ si indicherà il complesso γ, tale che, rispettivamente,

$$\gamma x = \alpha x + \beta x; \quad \gamma x = \alpha(\beta x); \quad \beta\gamma x = \alpha x,$$

qualunque sia il vettore x normale ad u. È facile dimostrare che $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ sono complessi univocamente determinati.

Se, *come in Algebra*, si conviene che

$$-\alpha = (-1)\alpha, \quad \alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

allora si dimostra facilmente che: *tutto l'algoritmo algebrico dei segni* $+$ $-$ $\times$ $:$ *e delle potenze, sussiste per i complessi*, come per i simboli algebrici $m + \sqrt{-1}n$.

In particolare si ha, *come in Algebra*,

$$h(m + in) = hm + ihn; \quad (m + in) + (m' + in') = (m + m') + i(n + n');$$
$$(m + in)(m' + in') = (mm' - nn') + i(mn' + nm'); \text{ ecc....}$$

Qualunque sia il vettore x normale ad u si ha

$$\text{mod}\,\{(m + in)x\} = \sqrt{m^2 + n^2}\,\text{mod}\,x$$
$$\{(m + in)x\} \times \{(m' + in')x\} = (mm' + nn')x^2$$
$$\{(m + in)x\} \wedge \{(m' + in')x\} = x^2(mn' - nm')u,$$

come si ottiene subito da note proprietà.

Conviene notare esplicitamente che il prodotto interno e vettoriale di $(m + in)x$ per $(m' + in')x$ *non hanno relazione* col

[1] Cfr. nota precedente.

prodotto dei due complessi $m + in$ e $m' + in'$: hanno però relazione col rapporto di questi complessi [1].

3. **Rotazioni in generale.** — Essendo φ un numero reale ed x un vettore normale ad u si ponga

$$a = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi\, x = \cos\varphi\, x + \operatorname{sen}\varphi\, ix.$$

I vettori a ed x hanno egual lunghezza e se O è un punto, si può andare da $O + x$ ad $O + a$ percorrendo, nella circonferenza di centro O e raggio mod x, un arco la cui lunghezza è il valore assoluto di φ mod x, percorrendo tale arco nel senso della rotazione i o nel senso opposto, secondo che φ è positivo o negativo.

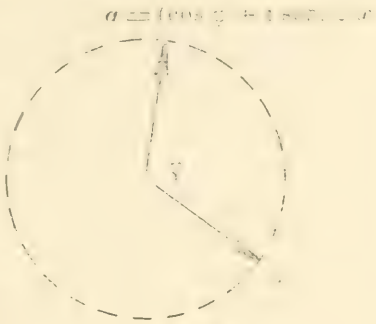

Fig. 18

Dunque l'operatore

$$\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$$

dà ad un qualunque vettore normale ad u la *rotazione di φ radianti* in un senso determinato.

Se si definisce $e^{i\varphi}$ come in Algebra si definisce $e^{i\pi/2}$, si trova:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$$

e quindi l'esponenziale $e^{i\varphi}$ rappresenta l'*operatore vettoriale rotazione di φ radianti.*

L'algoritmo dell'operatore $e^{i\varphi}$, assai semplice, è contenuto

[1] Tale relazione è espressa dalla formula, facile ad ottenersi ponendo $\alpha = m + in$ e $\beta = m' + in'$,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\alpha x)\times(\beta x) - i\{(\alpha x)\times(\beta x)\times u\}}{\beta x^2}.$$

Di qui risulta evidente come non sia lecito identificare i complessi α, β ai vettori αa, βa, essendo a un vettore unitario *fisso* normale ad u. Di più se tale identificazione fosse logicamente lecita, sarebbe inopportuna perchè si creerebbe l'elemento fisso a di riferimento, del tutto estraneo agli enti assoluti che si considerano perchè *arbitrario.*

nelle seguenti formule, in cui: m, φ, ψ sono numeri reali: a, b sono vettori normali ad u; h è un numero intero.

$$(1)\qquad m(e^{i\varphi}a) = e^{i\varphi}(ma); \quad e^{i\varphi}(a+b) = e^{i\varphi}a + e^{i\varphi}b.$$

$$(2)\qquad e^{i(2h\pi+\varphi)} = e^{i\varphi}, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{i2\pi} = 1.$$

$$(3)\qquad e^{i\psi}(e^{i\varphi}a) = e^{i(\psi+\varphi)}a, \quad e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}, \quad (e^{i\varphi})^m = e^{im\varphi}.$$

$$(4)\qquad (e^{i\varphi}a)\times(e^{i\varphi}b) = a\times b, \quad (e^{i\varphi}a)\setminus(e^{i\varphi}b) = a\setminus b,$$

$$(5)\qquad a\times e^{i\varphi}b = b\times e^{-i\varphi}a, \quad a\setminus e^{i\varphi}b = -b\setminus e^{-i\varphi}a,$$

$$(6)\qquad (e^{i\varphi}a)\times(e^{i\psi}a) = a^2\cos(\psi-\varphi), \quad (e^{i\varphi}a)\setminus(e^{i\psi}a) = a^2\operatorname{sen}(\psi-\varphi)\,u.$$

Dimostriamo ad es. la (4), le altre potendosi dimostrare in modo egualmente semplice. Si ha

$$\begin{aligned}(e^{i\varphi}a)\times(e^{i\varphi}b) &= (\cos\varphi\, a + \operatorname{sen}\varphi\, ia)\times(\cos\varphi\, b + \operatorname{sen}\varphi\, ib)\\ &= \cos^2\varphi\, a\times b + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,(ia)\times b + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, a\times ib\\ &\quad + \operatorname{sen}^2\varphi\, a\times b = a\times b,\end{aligned}$$

in virtù delle (4) del numero 1.

Osserviamo ancora che dalla (3) si deduce subito che: *la composizione delle rotazioni dei vettori normali ad u, cioè, la composizione delle rotazioni intorno ad assi paralleli,* si fa con le regole ordinarie degli esponenziali.

4. **Riduzione dei complessi ad esponenziali.** — Se m ed n sono numeri reali, non entrambi nulli, è determinato il numero reale positivo r e infiniti numeri reali φ tali che

$$m = r\cos\varphi, \quad n = r\operatorname{sen}\varphi:$$

cioè tali che

$$r = \sqrt{m^2+n^2}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{n}{m}$$

con $\cos\varphi$ del segno di m, e $\operatorname{sen}\varphi$ del segno di n.

Si ha dunque, in tali ipotesi,

$$m + in = r\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi = re^{i\varphi}:$$

e l'operatore $m + in$ è eguale al prodotto di due operatori: moltiplicazione per r (*modulo* del complesso), rotazione di φ (*argomento* del complesso) radianti. I due operatori sono invertibili.

5. **Aree piane e distanze.** — *a*) Se A, B, C sono punti del piano fisso normale ad u, dalla formula (6) del n. 1, cioè

$$(B-A)\wedge(C-A)=\{(B-A)\times i(C-A)\}u$$

e dalla definizione di $\wedge$ si ricava che il numero

$$\frac{1}{2}(B-A)\times i(C-A) \tag{1}$$

ha per valore assoluto l'area del triangolo ABC ed è *positivo* quando una persona che percorra il perimetro nel senso ABC, stando dalla parte del punto $O+u$, vede il triangolo alla sua *destra*. La (1), dunque, dà l'area, *con un segno*, del triangolo ABC.

Si noti che

$$(B-A)\times i(C-A)=(C-B)\times i(A-B)=(A-C)\times i(B-C)$$

e altre tre analoghe scambiando $B-A$ in $A-B$, ecc.

Se P è un punto qualunque del lato BC, l'area ABC è

$$\frac{1}{2}(C-B)\times i(A-P). \tag{2}$$

Infatti

$$(A-C)\times i(B-C)=(C-B)\times i(A-C)=(C-B)\times i\{(P-C)+(A-P)\}$$
$$=(C-B)\times i(A-P).$$

La distanza, con un segno, di A dalla retta BC è

$$\frac{(A-B)\times i(C-A)}{\operatorname{mod}(B-C)}.$$

La distanza, con segno, del punto A dalla retta che passa per il punto O ed è parallela al vettore unitario a, normale ad u, è, ovviamente

$$(A-O)\times ia.$$

b) Il quadrilatero piano, non intrecciato, determinato dalla successione di punti A, B, C, D ha per area

$$\frac{1}{2}(C-A)\times i(D-B) \tag{3}$$

cioè è equivalente al triangolo formato con le diagonali ed il

loro angolo, perchè tale area, somma delle aree dei due triangoli ABC, ACD, è data dalla metà della somma

$$(B-A)\times i(C-A)+(C-A)\times i(D-A)=$$
$$(B-A)\times i(C-A)-(D-A)\times i(C-A)=$$
$$\{(B-A)-(D-A)\}\times i(C-A)=(B-D)\times i(C-A).$$

c) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}=A_1$ è una successione di punti in un piano, il numero

$$(4)\qquad \sum_1^n (A_r-O)\times i(A_{r+1}-O)$$

non varia col variare di O nel piano.

Se infatti O' è un altro punto del piano si ha

$$(A_r-O)\times i(A_{r+1}-O)=$$
$$\{(A_r-O')+(O'-O)\}\times i\{(A_{r+1}-O')+(O'-O)\}=$$
$$(A_r-O')\times i(A_{r+1}-O')+(A_r-O')\times i(O'-O)-(A_{r+1}-O')\times i(O'-O)=$$
$$(A_r-O')\times i(A_{r+1}-O')+(A_r-A_{r+1})\times i(O'-O).$$

Sommando tutte le eguaglianze analoghe, la prima parte dell'ultimo membro esprimerà il numero (4) relativo al punto O'; la seconda parte è nulla perchè

$$\sum_1^n (A_{r+1}-A_r)=0$$

ed il teorema è dimostrato.

Se il poligono determinato dalla successione A_r non è intrecciato, allora il numero (4) ne da il doppio dell'area nel senso ordinario. In ogni caso poi tale numero può prendersi, per *definizione*, come doppio dell'area del poligono intrecciato.

d) Se P è il punto comune alle rette AB, CD e i punti M, N sono collineari con P e tali che [cfr. Fig. 19]

$$N-M=(B-A)+(D-C),$$

allora, comunque si fissi il punto O nel piano, la somma delle aree, con segno, dei due triangoli OAB, OCD eguaglia l'area del triangolo OMN.

Infatti se R, S sono tali che

$$P - R = B - A, \quad S - P = D - C$$

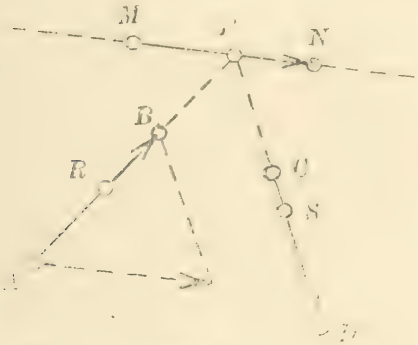

Fig. 19

e quindi

$$(B - A) + (D - C) = S - R = N - M,$$

le aree OAB, OCD sono rispettivamente eguali ad ORP, OPS. Ora si ha

$$(R - O) \times i(P - O) + (P - O) \times i(S - O)$$
$$(R - O) \times i(P - O) - (S - O) \times i(P - O)$$
$$(R - S) \times i(P - O) = (M - N) \times i(P - O) = (N - M) \times i(O - P)$$

che è appunto il doppio dell'area OMN per la (2).

c) La costruzione precedente si può applicare ad un numero finito di coppie di punti. Si tratta in generale di: *costruire i punti A_0, B_0 tali che, comunque si fissi O nel piano, l'area OA_0B_0 sia eguale alla somma delle aree OA_rB_r, $r = 1, 2, \ldots n$, i punti A_r, B_r essendo dati* [cfr. Fig. 20].

Supponiamo

$$\sum_1^n (B_r - A_r) \neq 0.$$

Partendo da M_0 arbitrario, si costruiscano i punti M_r tali che

$$M_r - M_{r-1} = B_r - A_r;$$

per l'ipotesi fatta sarà $M_n \neq M_0$. Si fissi P ad arbitrio e partendo da H_1, scelto ad arbitrio su A_1B_1, si costruisca H_r su

$A_r B_r$ in modo che $H_{r-1} - H_r$ sia parallelo a PM_{r-1} $(r = 2, \ldots, n)$. Le parallele condotte da H_1 e H_n nella figura si è fatto $n = 3$.

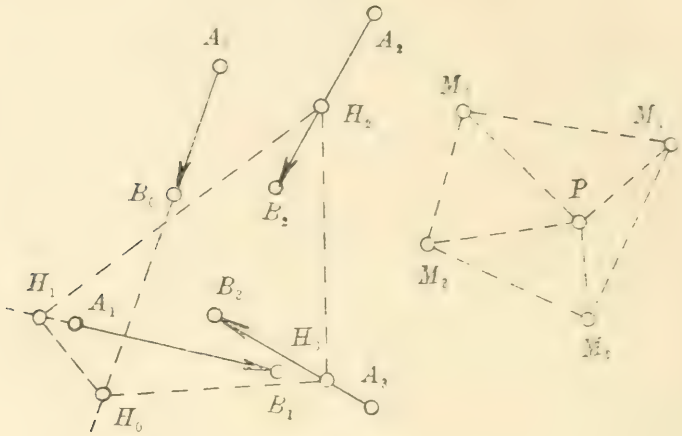

Fig. 11

a PM_r e PM_n si incontrino in H_r. Due punti A_r, B_r collineari con H_r e tali che

$$B_r - A_r = M_r - M_0 = \sum_1^r B_r - A_r ,$$

soddisfano alla condizione voluta.

Infatti: presi sulla retta $H_r H_{r+1}$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ e $H_{n+1} = H_n$ i punti R_r, S_r tali che

$$S_r - R_r = M_r - P,$$

per il teorema precedente l'area $OA_r B_r$ (per $r = 1, \ldots, n$) è la somma delle aree $OS_{r-1}R_{r-1}$, $OR_r S_r$ e l'area $OA_n B_n$ è la somma delle aree $OS_r R_r$, $OR_n S_n$: quindi (con notazione abbreviata, ma che coincide con la notazione assoluta di Grassmann-Peano per le forme di terza specie)

$$\sum_1^n OA_r B_r = (OS_0 R_0 + OR_1 S_1) + (OS_1 R_1 + OR_2 S_2) + \ldots$$
$$\ldots + OS_{n-1} R_{n-1} + OR_n S_n$$
$$= OS_n R_n + OR_n S_n = OA_n B_n$$

perchè

$$OS_1R_1 + OR_1S_1 = 0 \text{ ; ecc....}$$

Si osservi che per tutti i punti O di una parallela ad A_0B_0 la somma delle aree OA_rB_r è costante ed è nulla per i punti O di A_0B_0.

Sia ora

$$\sum_1^n B_r - A_r = 0,$$

cioè

$$M_n = M_0.$$

Ripetiamo la costruzione precedente per le coppie A_rB_r da $r = 1$ ad $r = n - 1$. Se H_n cade sulla A_0B_0, allora comunque si fissi il punto O la somma delle aree OA_rB_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ è nulla. Se H_n non cade sulla A_0B_0, allora $A_n - B_n = A_0 - B_0$ e comunque si fissi O, la somma delle aree OA_rB_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ è costante e vale l'area del parallelogrammo $A_nB_nA_0B_0$.

f La precedente costruzione è anche applicabile quando i vettori $B_r - A_r$ sono paralleli; in tal caso i punti M sono tutti collineari e P va preso fuori della retta che li contiene.

Se a è un vettore unitario parallelo alla direzione comune dei vettori dati, si può porre

$$B_r - A_r = m_r a, \quad B_r = A_r + m_r a$$

e si ha

$$B_0 - A_0 = \sum_1^n m_r a = ma,$$

dove

$$m = \sum_1^n m_r.$$

Se $m \neq 0$, la retta A_0B_0 passa per il baricentro dei punti A_r con le masse rispettive m_r; cioè passa per il punto

$$G = \left(\sum_1^n m_r A_r\right) : m.$$

Infatti. È noto che la retta A_0B_0 è il luogo dei punti O per i quali la somma delle aree dei triangoli A_rB_rO è nulla. Ora per la somma dei doppi delle aree dei triangoli A_rB_rG

si ha dalla 1) e dalle precedenti posizioni,

$$\sum_1^n B_r - A_r \times i\,G = A_0 \qquad \sum_1^n m_r \cdot a \times i\,G = A_0$$

$$\sum_1^n a \times i\,m_r G - m_r A_r = \quad a \times i\,mG \qquad \sum_1^n m_r A_r$$

$$a \times i\,mG - mG = 0$$

che dimostra quanto abbiamo affermato.

Questa proprietà fornisce una costruzione del baricentro dei punti A_r con masse m_r specialmente utile quando le masse m_r hanno il valor assoluto rappresentato da dati segmenti. Ciò può farsi in due modi. Determinando cioè con la costruzione e) due coppie $A_0 B_0$ corrispondenti a due direzioni a arbitrarie ma distinte: il punto comune alle due rette è il punto G. Oppure facendo una sola volta la costruzione e) ed osservando che, mediante la costruzione stessa, si ha sulla retta $A_1 A_2$ il baricentro G_1 dei punti A_1, A_2 di masse m_1, m_2; sulla $G_1 A_3$ il baricentro di $m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3$, ecc.; bisogna però ordinare in modo che delle successive somme degli m nessuna sia zero: cioè che nella successione M_0, M_1,... M_n due punti consecutivi siano sempre distinti.

Si vede con quanta semplicità si dimostrino note costruzioni di statica grafica. Però, giova osservarlo, il calcolo di Grassmann-Peano per le forme di seconda specie, da tali dimostrazioni mediante *identità* analoghe ad *identità algebriche* e quindi in modo ancor più semplice e rapido [1].

6. Coordinate cartesiane e polari. – Si fissi nel piano un vettore unitario i ed un punto O. Se P è un punto del piano, si ha in un sol modo

$$P = O + xi + yii = O + x + iy\,i;$$

[1] Giova anche notare che nel caso e) è talvolta possibile valersi di una costruzione più rapida che richiede il poligono dei punti M ma non il polo P. Le rette $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ si incontrino in un punto proprio K_1; la parallela condotta da K_1 alla retta $M_1 M_2$ incontri la retta $A_3 B_3$ nel punto proprio K_2; e così si continui (se è possibile con punti propri K e contenuti nei limiti del campo del disegno) sino a determinare K_{n-2}; per K_{n-1} passa la $A_n B_n$, ecc.

i numeri x ed y sono le coordinate cartesiane ortogonali di P rispetto ad una coppia d'assi condotti per O parallelamente ad $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{ii}$.

Se r è la distanza di P da O e φ la rotazione che si deve dare ad $\boldsymbol{i}$ per portarlo nella direzione e verso di $P - O$, si ha

$$P = O + re^{\varphi}\boldsymbol{i},$$

e i numeri r, φ sono le *coordinate polari* di P, essendo O il polo, la parallela condotta da O ad $\boldsymbol{i}$ l'*asse polare*, e il verso di $\boldsymbol{i}$ il *verso positivo dell'asse*.

Il passaggio dalle coordinate polari di P a quelle cartesiane, O ed $\boldsymbol{i}$ essendo comuni ai due sistemi, si fa con le formule

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

ed il passaggio inverso con le formule

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x}$$

con $\cos\varphi$ dello stesso segno di x.

CAPITOLO V.

Funzioni di numeri.

1. **Limite.** — Si può considerare un *vettore*, un *punto*, in generale una F_1, *funzione* delle variabili numeriche t, u, v,... (numeri reali): p. es., riferendo i punti ad un sistema cartesiano e dando le loro coordinate in funzione di t, u, v,...

Se $u(t)$ è un vettore funzione della variabile t, si dirà che il vettore u_0 è « il limite di $u(t)$ per t tendente a t_0 », cioè

$$\lim_{t=t_0} u(t) = u_0,$$

quando, comunque si fissi il vettore a indipendente da t,

$$\lim_{t=t_0} (u \times a) = u_0 \times a.$$

La definizione di limite di un vettore variabile è così ridotta al concetto di limite ordinario di una funzione numerica $u \times a$.

Se $P(t)$ è un punto funzione di t e P_0 è un punto, si dirà che

$$\lim_{t=t_0} P(t) = P_0,$$

quando

$$\lim_{t=t_0} \{P(t) - P_0\} = 0 = \text{vettore nullo}.$$

Finalmente se $S(t)$ è una F_1 di massa x, funzione di t, e S_0 è una F_1 fissa di massa x_0, si dirà che

$$\lim_{t=t_0} S(t) = S_0,$$

quando, comunque si fissi il punto O,

$$\lim_{t=t_0} x = x_0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_0} \{S(t) - xO\} = S_0 - xO;$$

anche in tal caso siamo ricondotti al limite di un vettore, perchè $S(t) - xO$ è sempre un vettore.

La permanenza delle leggi formali per le $\mathbf{F}_1$, che comprendono vettori e punti, e la permanenza delle leggi fondamentali algebriche per i prodotti interni e vettoriali, conduce alla *permanenza delle ordinarie proprietà dei limiti*, che possiamo quindi risparmiarci di enunciare e di dimostrare.

La funzione $S(t)$ si dirà *continua* per $t = t_0$, quando

$$\lim_{t \to t_0} S(t) = S(t_0).$$

2. **Derivate.** — Come in Analisi, la *derivata* di $S(t)$, cioè di una $\mathbf{F}_1$ funzione della variabile numerica t, si definisce [1]

$$\frac{dS(t)}{dt} = D.S(t) = DS(t) = S'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}.$$

Analogamente il *differenziale di* $S(t)$, $dS(t)$, è il prodotto della derivata per dt.

La derivata (supposta esistente) di una $\mathbf{F}_1$ *è una* $\mathbf{F}_1$. *In particolare, la derivata di un punto è un vettore, quella di un vettore è un vettore.* Ciò risulta subito dalla definizione.

Le derivate successive si definiscono come in Analisi; la derivata di ordine n di una $\mathbf{F}_1$ o di un vettore è una $\mathbf{F}_1$ o un vettore; di un punto invece è sempre un vettore.

Le ordinarie leggi delle derivate di somme, prodotti, ecc., sussistono tutte com'è facile comprendere.

Così per due vettori u e v funzioni di una variabile numerica, tenendo presente che $\times$ e $\wedge$ sono distributivi rispetto alla somma, come il prodotto ordinario, si ha

$$(1) \qquad d(u \times v) = u \times dv + v \times du$$

$$(2) \qquad d(u \wedge v) = u \wedge dv + du \wedge v = u \wedge dv - v \wedge du.$$

[1] Cfr. anche il recentissimo trattato di T. Boggio, *Calcolo differenziale con applicazioni geometriche*. (Collezione Lattes; Torino, a. 1921).

In particolare

$$d\,u^2 = 2u \times du \tag{3}$$

$$d\,\text{mod}\,u = \frac{u}{\text{mod}\,u} \times du \tag{4}$$

$$d\left(\frac{u}{\text{mod}\,u}\right) = \frac{(u \times du) \times u}{\text{mod}\,u^3}. \tag{5}$$

L'operatore i funziona da costante nelle derivazioni e l'esponenziale e^{φ} si deriva con le leggi ordinarie degli esponenziali, vale a dire si ha

$$d\,iu = i\,du, \tag{6}$$

$$d\,e^{\varphi}u = e^{\varphi}du + d\varphi \cdot e^{\varphi}iu, \tag{7}$$

perchè

$$d\,e^{\varphi}u = d\cos\varphi\,u + \text{sen}\,\varphi\,iu$$
$$= \cos\varphi\,du + \text{sen}\,\varphi\,i\,du + (-\text{sen}\,\varphi\,u + \cos\varphi\,iu)\,d\varphi.$$

È poi ovvio che riferendoci ad un sistema di coordinate cartesiane, *le coordinate della derivata sono le derivate delle coordinate.*

Infine notiamo che se $S(u, v, w, \ldots)$ è F_1 funzione delle variabili numeriche u, v, w.... si ha

$$dS = \frac{\partial S}{\partial u}du + \frac{\partial S}{\partial v}dv + \ldots \tag{8}$$

3. **Vettori e loro derivate.** — Sono di uso assai frequente le proprietà, che ora esporremo, delle derivate di un vettore u funzione di t.

Se il modulo di u è costante, allora la derivata di u è un vettore o nullo o normale ad u; e viceversa.

Infatti

$$u^2 = \text{cost.}$$

(4) Dall'essere $u^2 = (\text{mod}\,u)^2$ si ricava $d(u^2) = 2\,\text{mod}\,u\,d(\text{mod}\,u)$ e quindi la (3) dà subito la (4). Per ottenere la (5) si opera così:

$$d\left(\frac{u}{\text{mod}\,u}\right) = \frac{(\text{mod}\,u)\,du - d(\text{mod}\,u) \cdot u}{(\text{mod}\,u)^2} =$$
$$= \frac{u^2 \cdot du - (u \times du) \cdot u}{(\text{mod}\,u)^3} = \frac{(u \times du) \times u}{(\text{mod}\,u)^3}.$$

derivando, equivale alla condizione

$$u \times u = 0.$$

Le condizioni

$$(1) \qquad u \neq 0 \quad e \quad u \times \frac{du}{dt} = 0$$

ovvero

$$(2) \qquad u \times \frac{du}{dt} \neq 0 \quad e \quad u \times \frac{du}{dt} \times \frac{d^2u}{dt^2} = 0,$$

verificate in tutto il campo di variazione di t, esprimono rispettivamente che u ha direzione fissa, o u è parallelo ad un piano fisso.

Indicando con gli apici le derivate rispetto a t, si ha, in virtù della seconda delle (1) [cfr. n. 2, (5)],

$$\left(\frac{u}{\text{mod } u}\right)' = \frac{u \times u'}{\text{mod } u^3} = 0;$$

dunque

$$\frac{u}{\text{mod } u} = \text{cost.}$$

cioè « *la direzione di u è costante* ». Poscia essendo

$$u \times u' \times (u \times u'')' = u \times u' \times u \times u'' + u'' \times u \times u' = (u \times u'') \times u'' u = 0,$$

risulta, per la (1), che

$$u \times u$$

ha direzione costante: e quindi u è parallelo al piano, di giacitura costante, normale ad $u \times u'$; e così è dimostrata la (2).

Affinchè dunque il vettore u sia parallelo ad una retta o ad un piano fissi è *necessario* che sia

$$u \times u = 0 \quad \text{oppure} \quad u \times u' \times u'' = 0,$$

in tutto il campo di variazione di t. La condizione diviene *sufficiente*, quando, rispettivamente $u \neq 0$, $u \times u \neq 0$.

È pure notevole il teorema seguente. *Se a, u sono vettori, il primo costante, il secondo funzione di t, allora le condizioni*

$$(4) \qquad a \times u \times \frac{du}{dt} = 0, \quad a \times u \neq 0,$$

verificate in tutto il campo di variazione di t, esprimono che: a $\times$ *u*

ha direzione fissa, parallela ad un vettore costante b che è normale ad a; u e $\frac{du}{dt}$ sono paralleli ad un piano fisso normale a b (quindi parallelo ad a); $u \wedge \frac{du}{dt}$ è parallelo a b, cioè normale ad a.

Siccome si ha

$$a \wedge (u \wedge u') = (a \wedge u) \wedge u' = (a \wedge u') \wedge u = (u \cdot a) \wedge u' - (u' \cdot a) \wedge u,$$

le condizioni (4) esprimono, in virtù del teorema precedente, che $a \wedge u$ è parallelo ad un vettore fisso b che, per essere $a \wedge u$ normale ad a, è normale ad a. Essendo $a \wedge u$, parallelo a b, normale ad u, si ha $u \times b = 0$ e quindi anche $u \times b' = u' \times b = 0$; vale a dire u ed u' sono paralleli ad un piano fisso normale a b e quindi parallelo ad a. In conseguenza $u \wedge u'$, che è normale tanto ad u quanto ad u', ha direzione fissa parallela a b e quindi normale ad a.

4. Formula di Taylor. Il teorema di GIOVANNI BERNOULLI (1694) detto, secondo la forma sotto cui si esprime, formula di TAYLOR (1715) o formula di MACLAURIN (1742), sussiste, sotto certe condizioni, anche per le $\mathbf{F}_1$.

Se $S(x)$ è una $\mathbf{F}_1$ definita nell'intervallo (a, b), S e le sue derivate sino all'ordine $m-1$ sono $\mathbf{F}_1$ pure definite nello stesso intervallo, t è un numero di (a, b), $S^{(m)}(t)$ è una $\mathbf{F}_1$ determinata, h un numero tale che $t+h$ appartiene ad (a, b), e finalmente ε è la $\mathbf{F}_1$, dipendente da t e da h, definita dalla condizione

$$S(t+h) = S(t) + hS'(t) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} S''(t) + \dots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} S^{(m-1)}(t) +$$
$$+ \frac{h^m}{m!} \{ S^{(m)}(t) + \varepsilon \}:$$

allora si ha

$$\lim_{h=0} \varepsilon = 0.$$

Sia infatti $S(t)$ un vettore, e si ponga, essendo a un vettore costante,

$$f(t) = S(t) \times a;$$

sviluppando $f(t+h)$ come è stato sviluppato $S(t+h)$ si deduce subito che

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \times a.$$

Ma per le ordinarie funzioni numeriche si ha

$$\lim_h \varepsilon_1 = 0:$$

ed essendo a arbitrario deduciamo:

$$\lim_h \varepsilon = 0.$$

Il teorema vale pure, e lo si dimostra in modo analogo, se S è un punto e quindi per S qualunque.

Giova notare esplicitamente che, anche supposto $S(t)$ definita in tutto l'intervallo (a, b), *non si può* all'ultimo termine dello sviluppo di $S(t+h)$ sostituire, come per le funzioni numeriche,

$$\frac{h^m}{m!} S^{(m)}(t + \vartheta h).$$

Si potrebbe invece sostituire $\frac{h^m}{m!} S_1$, ove S_1 è una $\mathbf{F}_1$ *media* tra le $S^{(m)}(x)$, variando x da t a $t+h$: ma non avremo bisogno di far uso di tale formula.

5. **Integrali.** — Se $S(t)$ è una $\mathbf{F}_1$ funzione di t, allora

$$\int S(t)\,dt$$

indicherà una qualunque delle $\mathbf{F}_1$ che hanno per derivata $S(t)$. Due di tali funzioni differiscono per una costante. Se

$$\int S(t)\,dt = S_1(t)$$

e a e b sono numeri reali, si porrà, come in Analisi,

$$\int_a^b S(t)\,dt = S_1(b) - S_1(a).$$

L'integrale limitato di una $\mathbf{F}_1$ è una $\mathbf{F}_1$; di un punto una $\mathbf{F}_1$; di un vettore un vettore.

(¹) Forma dovuta a PEANO. Cfr. T. BOCCIO, loc. cit., pag. 472.

Diamo, come esempio, l'integrale generale della *equazione differenziale lineare del primo ordine, vettoriale,*

$$\frac{dx}{dt} = mx + u, \tag{1}$$

ove x è il vettore, funzione di t, da determinarsi e m, u sono *numero* e *vettore*, dati, funzioni di t. L'integrale generale è

$$x = e^{\int m dt}\left(a + \int_0^t e^{-\int m dt} u\, dt\right), \tag{2}$$

ove a è un vettore *costante arbitrario.*

Infatti. Moltiplicando la (1) per $e^{-\int m dt}$, suo *fattore integrante* supposto zero il valore iniziale di t, si ha,

$$e^{-\int m dt}\frac{dx}{dt} - m e^{-\int m dt} x = e^{-\int m dt} u,$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int m dt} x\right) = e^{-\int m dt} u,$$

che dà subito

$$e^{-\int m dt} x = a + \int_0^t e^{-\int m dt} u\, dt$$

da cui si ricava la (2).

CAPITOLO VI.

Funzioni di un punto.

1. **Funzioni di un punto in generale.** — Si può considerare un *numero*, o un *vettore*, o un *punto* una F_1 funzioni di un punto variabile P. Anche di queste funzioni di P si possono considerare le *derivate rispetto alla variabile* P: ed il loro calcolo formale ha molte proprietà a comune col calcolo delle ordinarie derivate. Ma per lo studio generale di tali derivate è necessario l'uso delle *omografie vettoriali* [1] e ci limiteremo a considerare alcune speciali funzioni delle derivate rispetto al punto variabile P e precisamente: il *gradiente* di un numero, la *rotazione* e la *divergenza* di un vettore.

2. **Gradiente.** — Se u è un numero funzione del punto P, variabile in un campo a tre dimensioni, con la notazione

$$\operatorname{grad} u,$$

che si legge « gradiente di u », si indica il vettore, funzione di u e di P soltanto, tale che

$$du = \operatorname{grad} u \times dP \tag{1}$$

qualunque sia lo spostamento vettore dP di P, essendo du il corrispondente incremento di u.

Se P varia in un piano, grad u è definito unendo alla (1) la condizione « grad u è parallelo al piano in cui varia P ».

Se il vettore grad u esiste, esso è unico. Se infatti a e b sono

(1) C. Burali-Forti et R. Marcolongo. *Analyse vectorielle générale*, vol. I. (S. Lattes, Torino).

vettori funzioni di u e di P soltanto, tali che

$$du = \boldsymbol{a} \times dP = \boldsymbol{b} \times dP,$$

si ha

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times dP = 0,$$

qualunque sia lo spostamento dP nel campo considerato: e quindi $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

a) Se u è numero reale funzione di P, $\boldsymbol{a}$ è vettore costante e O è un punto fisso, si ha:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{da } u = \text{cost segue } \operatorname{grad} u = 0 \\ \operatorname{grad}\{u \cdot \boldsymbol{a} \times (P - O)\} = u\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times (P - O) \cdot \operatorname{grad} u \\ \operatorname{grad}\{\boldsymbol{a} \times (P - O)\} = \boldsymbol{a}. \end{cases}$$

Per $u = \text{cost}$ si ha $du = 0$ e quindi, per la (1), $\operatorname{grad} u \times dP = 0$ per dP arbitrario e quindi $\operatorname{grad} u = 0$.

Dalla (1) si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\{u \cdot \boldsymbol{a} \times (P - O)\} \times dP &= d\{u \cdot \boldsymbol{a} \times (P - O)\} \\ &= u \cdot \boldsymbol{a} \times dP + du \cdot \boldsymbol{a} \times (P - O) \\ &= u \cdot \boldsymbol{a} \times dP + \boldsymbol{a} \times (P - O) \cdot \operatorname{grad} u \times dP \\ &= \{u\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times (P - O) \cdot \operatorname{grad} u\} \times dP \end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di dP dimostra la seconda delle (2).

Da questa, per $u = 1$, e per la prima, risulta la terza.

b) Se $u, v, w, \ldots$ sono numeri funzioni di P e $f(u, v, w, \ldots)$ è pure numero funzione di $u, v, w, \ldots$ e quindi anche di P, allora, notando che

$$\begin{aligned} df &= (\operatorname{grad} f) \times dP \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \ldots \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v + \ldots\right) \times dP, \end{aligned}$$

si deduce che

$$(3) \qquad \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v + \ldots;$$

e in questa il simbolo grad gode delle medesime proprietà del simbolo d di differenziale.

Risulta in particolare:

$$
(3') \quad \begin{cases} \operatorname{grad}(mu) = m \operatorname{grad} u & (m \text{ costante}) \\ \operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v \\ \operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u \\ f'(u) \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \int f(u)\,du. \end{cases}
$$

c) Noto il gradiente nei casi particolari seguenti, la (3) permette di calcolarlo in moltissimi altri casi.

Se r è la distanza, non nulla, del punto P da un punto, o retta, o piano fisso; O è il punto fisso, o il piede della normale condotta da P sulla retta o sul piano, si ha

$$
(4) \qquad \operatorname{grad} r = \frac{P-O}{r};
$$

cioè grad r *è vettore unitario diretto dal punto O al punto variabile e quindi, nel caso della retta o del piano, normale a questi enti.*

Infatti

$$
r^2 = (P-O)^2;
$$

differenziando e dividendo per r, si ha

$$
dr = \frac{P-O}{r} \times (dP - dO) = \frac{P-O}{r} \times dP - \frac{P-O}{r} \times dO;
$$

ma se O è fisso, $dO = 0$; se O è il piede della normale condotta da P alla retta o al piano,

$$
(P-O) \times dO = 0;
$$

dunque

$$
dr = \frac{P-O}{r} \times dP = \operatorname{grad} r \times dP;
$$

e la (4) resta dimostrata.

Se u è un vettore unitario normale ad un piano fisso, r la distanza relativa di P dal piano, positiva o negativa secondochè P si trova o no dalla stessa parte di $O + u$, essendo O un punto qualunque del piano, si ha

$$
(5) \qquad \operatorname{grad} r = u.
$$

È infatti noto che

$$r = (P - O) \times a;$$

quindi

$$dr = a \times dP; \text{ ecc.}$$

Siano O un punto e a un vettore unitario (fissi (costanti). Il punto P vari comunque nello spazio, purchè non possa assumere posizioni nella retta uscente da O e parallela ad a. Si ponga

$$(a) \qquad r = \operatorname{mod}(P - O)$$

ed inoltre, essendo i l'operatore rotazione di un retto relativo al vettore unitario

$$(b) \qquad a = (P - O) \setminus a \,(\operatorname{mod}(P - O) \setminus a)$$

(operatore non fisso ma variabile col piano dei tre punti O, $O + a$, P), sia φ uno qualunque dei numeri reali tali che

$$(c) \qquad P = O + re^{i\varphi}a.$$

In tali ipotesi si ha:

$$(6) \qquad \operatorname{grad}\varphi = \frac{i \operatorname{grad} r}{r} = i \operatorname{grad}\log r,$$

ovvero sotto forma indipendente da i

$$(7) \qquad \operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\varphi} \operatorname{grad} r \setminus (\operatorname{grad} r \setminus a)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \operatorname{grad}\log r \setminus (\operatorname{grad} r \setminus a).$$

Dalle (b), (c) si ha

$$P = O + re^{i\varphi}a = O + r(\cos\varphi \cdot a + \operatorname{sen}\varphi \cdot a \setminus u);$$

differenziando e tenendo conto che a è costante,

$$dP = dr \cdot e^{i\varphi}a + rd\varphi \cdot e^{i\varphi}ia + r \operatorname{sen}\varphi \cdot a \setminus du;$$

moltiplicando $(\times)$ per $e^{-i\varphi}ia$ ed osservando che (per essere a

unitario e quindi du, o nullo, o normale ad u, i vettori a, du, e^{-ia} sono complanari, si ha

$$dP \times e^{-ia} = r d\varphi.$$

Ma per la (4) e la (c), questa dà

$$dP \times i \operatorname{grad} r = r d\varphi$$

dalla quale, per la (1), si deducono le (6) [1].

Dalla (4) e dalle (b), (c) si ha

$$u = \operatorname{grad} r \wedge a \operatorname{sen} \varphi$$

e quindi esprimendo, nelle (6), i mediante u si ha

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{r} \operatorname{grad} r \wedge \frac{\operatorname{grad} r \wedge a}{\operatorname{sen} \varphi} \quad \text{ecc.},$$

che dà le (7).

d) Se rispetto al sistema cartesiano ortogonale fisso O, i, j, k, si ha

$$P = O + xi + yj + zk,$$

allora

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k. \tag{8}$$

Infatti, essendo x la distanza relativa di P dal piano dei punti O, $O + j$, $O + k$, positiva o negativa secondochè P è o no dalla parte di $O + i$, ecc., per la (5) si ha

$$\operatorname{grad} x = i; \quad \operatorname{grad} y = j; \quad \operatorname{grad} z = k;$$

poscia applicando la (3) risulta la (8).

Si potrebbe anche dimostrare così:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k\right) \times dP = \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \dots\right) \times i dx + \dots =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = du.$$

[1] Si noti che, non potendo, per le ipotesi fatte, trovarsi P sulla retta Oa, è sempre $r \neq 0$ e $\operatorname{sen} \varphi \neq 0$.

La (8) prova l'esistenza di grad u quando per ogni dP è determinato il du corrispondente.

3. Rotazione e divergenza. — Sia u un vettore funzione del punto P. Chiameremo *rotazione* [1] di u, « rot u », e *divergenza* di u, « div u », rispettivamente il *vettore* ed il *numero*, funzioni di P ed u soltanto, definiti dalle condizioni

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{rot} u \times dP \setminus \delta P = du \times \delta P - \delta u \times dP \\ \operatorname{div} u \cdot dP \times \delta P \setminus \vartheta P = \\ \qquad du \times \delta P \setminus \vartheta P + \delta u \times \vartheta P \setminus dP + \vartheta u \times dP \setminus \delta P \end{cases}$$

qualunque siano gli spostamenti dP, δP, ϑP di P essendo du, δu, ϑu i corrispondenti spostamenti di u.

La prima delle (1) dice che la proiezione di rot u sul vettore $dP \setminus \delta P$ eguaglia la differenza algebrica delle proiezioni di du e δu rispettivamente su δP e dP; la seconda esprime che

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u \cdot \operatorname{Vol}(O, O + dP, O + \delta P, O + \vartheta P) &= \\ \operatorname{Vol}(O, O + du, O + \delta P, O + \vartheta P) &+ \\ + \operatorname{Vol}(O, O + \delta u, O + \vartheta P, O + dP) &+ \\ + \operatorname{Vol}(O, O + \vartheta u, O + dP, O + \delta P) & \end{aligned}$$

qualunque sia il punto O.

È da notarsi che alle (1) può darsi la forma importante

$$(2)\quad \begin{cases} \operatorname{rot} u \times dP \setminus \delta P = d(u \times \delta P) - \delta(u \times dP) \\ \operatorname{div} u \cdot dP \times \delta P \setminus \vartheta P = \\ \qquad d(u \times \delta P \setminus \vartheta P) + \delta(u \times \vartheta P \setminus dP) + \vartheta(u \times dP \setminus \delta P) \end{cases}$$

come risulta subito eseguendo la differenziazione e osservando che gli operatori d, δ, ϑ sono commutabili [3].

(1) Sarebbe più conveniente dire *rotazionale* di u, poichè rot u non è una rotazione nel senso che si attribuisce di solito alla parola *rotazione*; ma seguiamo l'uso comune per quanto inesatto.

(2) Questa definizione assoluta di div u, indipendente da rot e grad, è dovuta al prof. T. Boggio che ce l'ha gentilmente comunicata.

(3) Il lettore noti che grad u, rot u, div u si definiscono, rispettivamente, mediante *un solo* spostamento dP di P, *due* spostamenti dP, δP di P, *tre* spostamenti dP, δP, ϑP di P, del tutto arbitrari.

È pure importante osservare che anche la rot u si può esprimere mediante tre spostamenti di P.

$$(3) \qquad \begin{aligned} &dP \times \partial P \cdot \partial P \cdot \mathrm{rot}\, u \\ &du \cdot \partial P \cdot \partial P + \partial u \cdot \partial P \cdot dP + \partial u \cdot dP \cdot \partial P \\ &d(u \cdot \partial P \cdot \partial P) + \partial(u \cdot \partial P \cdot dP) + \partial(u \cdot dP \cdot \partial P). \end{aligned}$$

Si ha, infatti, per una nota identità e per la (1)

$$\begin{aligned} dP \times \partial P \cdot \partial P \cdot \mathrm{rot}\, u &= \mathrm{rot}\, u \times \partial P \cdot \partial P \cdot dP + \ldots\ldots + \ldots\ldots \\ &= (\partial u \times \partial P - \partial u \times \partial P) \cdot dP + \ldots\ldots + \ldots\ldots \\ &= -(du \times \partial P \cdot \partial P - du \times \partial P \cdot \partial P) - \ldots\ldots - \ldots\ldots \\ &= -du \cdot \partial P \cdot \partial P - \ldots\ldots - \ldots\ldots \\ &= \text{ecc.} \end{aligned}$$

Se gli operatori rot, div *esistono, essi sono univocamente determinati dalle* (1) *e sono funzioni di P soltanto, cioè applicati ad un vettore u dànno un vettore e un numero funzioni di u e P soltanto.*

Infatti. Se rot $'u$, div $'u$ verificano le (1), insieme a rot u e div u, allora si avrà

$$\begin{aligned} (\mathrm{rot}\, u - \mathrm{rot}\, 'u) \times dP \cdot \partial P &= 0 \\ (\mathrm{div}\, u - \mathrm{div}\, 'u) \cdot dP \times \partial P \cdot \partial P &= 0; \end{aligned}$$

ma $dP \cdot \partial P$, $dP \times \partial P \cdot \partial P$ sono vettore e numero arbitrarii e quindi deve essere

$$\mathrm{rot}\, u = \mathrm{rot}\, 'u, \quad \mathrm{div}\, u = \mathrm{div}\, 'u. \qquad \text{c. d. d.}$$

Vedremo [formule (10), (11)], che: *il vettore* rot u *e il numero* div u *esistono (e quindi per il teorema precedente sono univocamente determinati) quando per ogni spostamento arbitrario dP di P esiste il corrispondente spostamento du di u* [1].

a) Le proprietà fondamentali delle funzioni rot, div, sono le seguenti, in cui u e v sono vettori, m un numero reale, fun-

[1] Dal teorema a pag. 55 di A. V. G. vol. I. l. c. e dalle (1) risulterebbe subito la esistenza di rot u e div u nelle ipotesi fatte.

zioni di P:

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} u = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \text{ per } u = \text{cost}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}(u + v) = \operatorname{rot} u + \operatorname{rot} v \\ \operatorname{div}(u + v) = \operatorname{div} u + \operatorname{div} v \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}(mu) = m \operatorname{rot} u + \operatorname{grad} m \wedge u \\ \operatorname{div}(mu) = m \operatorname{div} u + \operatorname{grad} m \times u \end{cases}$$

$$(7)\qquad \operatorname{div}(u \wedge v) = v \times \operatorname{rot} u - u \times \operatorname{rot} v.$$

La $\operatorname{rot}(u \wedge v)$ e il $\operatorname{grad}(u \times v)$ non si possono esprimere con le funzioni grad, div, rot.

Le (4) risultano subito dalle (1) poichè per $u = \text{cost}$ si ha, come è ovvio, $du = \delta u = \vartheta u = 0$.

Anche le (5) si ottengono subito dalle (1) perchè i secondi membri di queste sono funzioni lineari di u.

Dimostriamo ora la prima delle (6). Dalla (1) si ha:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(mu) \times dP \wedge \delta P &= d(mu) \times \delta P - \delta(mu) \times dP \\
&= m(du \times \delta P - \delta u \times dP) + dm \cdot u \times \delta P - \delta m \cdot u \times dP \\
&= m \cdot \operatorname{rot} u \times dP \wedge \delta P + \operatorname{grad} m \times dP \cdot u \times \delta P - \operatorname{grad} m \times \delta P \cdot u \times dP \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots + \operatorname{grad} m \times (u \times \delta P \cdot dP - u \times dP \cdot \delta P) \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots + \operatorname{grad} m \times u \wedge (dP \wedge \delta P) \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots + \operatorname{grad} m \wedge u \times (dP \wedge \delta P) \\
&= (m \operatorname{rot} u + \operatorname{grad} m \wedge u) \times dP \wedge \delta P
\end{aligned}$$

che, per l'arbitrarietà di $dP \wedge \delta P$, dimostra quanto abbiamo affermato.

In modo analogo si ottiene la seconda delle (6) dalla seconda delle (1) e il lettore può farlo per esercizio.

Dalle (1) e (3) si ha

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(u \wedge v) \cdot dP \times \delta P \wedge \vartheta P \\
&= (u \wedge dv - v \wedge du) \times \delta P \wedge \vartheta P + \ldots\ldots + \ldots\ldots \\
&= u \times (dv \wedge \delta P \wedge \vartheta P + \ldots\ldots + \ldots\ldots) - v \times (du \wedge \delta P \wedge \vartheta P + \ldots\ldots + \ldots\ldots) \\
&= (-u \times \operatorname{rot} v + v \times \operatorname{rot} u) \cdot dP \times \delta P \wedge \vartheta P
\end{aligned}$$

che dimostra la (7).

b) Se il vettore u è funzione dei numeri reali $u, v, \ldots$ che, alla loro volta, sono funzioni di P, allora anche u è funzione di P e si ha

$$\text{rot}\, u = \text{grad}\, u \wedge \frac{\partial u}{\partial u} + \text{grad}\, v \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + \ldots \tag{8}$$

$$\text{div}\, u = \text{grad}\, u \times \frac{\partial u}{\partial u} + \text{grad}\, v \times \frac{\partial u}{\partial v} + \ldots \text{ [1]}. \tag{9}$$

Infatti:

$$\text{rot}\, u \times dP \wedge \delta P = \left(\Sigma \frac{\partial u}{\partial u} du\right) \times \delta P - \left(\Sigma \frac{\partial u}{\partial u} \delta u\right) \times dP$$

$$= \Sigma\, \text{grad}\, u \times dP \cdot \frac{\partial u}{\partial u} \times \delta P - \Sigma\, \text{grad}\, u \times \delta P \cdot \frac{\partial u}{\partial u} \times dP$$

$$= \Sigma \left(\text{grad}\, u \wedge \frac{\partial u}{\partial u}\right) \times dP \wedge \delta P,$$

che, per essere $dP \wedge \delta P$ indipendente da $u, v, \ldots$ e arbitrario, dimostra la (8). In modo analogo si dimostra la (9).

c) Se rispetto al solito sistema cartesiano unitario-ortogonale-destrogiro $O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ si ha

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad u = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k},$$

allora u è funzione tanto di x, y, z, quanto di u_1, u_2, u_3 e come casi particolari delle (8), (9) si ha

$$\text{rot}\, u = \text{grad}\, u_1 \wedge \boldsymbol{i} + \text{grad}\, u_2 \wedge \boldsymbol{j} + \text{grad}\, u_3 \wedge \boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{i} \wedge \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k} \wedge \frac{\partial u}{\partial z} \tag{10}$$

$$= \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$\text{div}\, u = \text{grad}\, u_1 \times \boldsymbol{i} + \text{grad}\, u_2 \times \boldsymbol{j} + \text{grad}\, u_3 \times \boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{i} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k} \times \frac{\partial u}{\partial z} \tag{11}$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

[1] T. Boggio, *Sul gradiente di una omografia vettoriale*. (Rend. R. Acc. Lincei, vol. XIX, s. 5ª (1910), pp. 383-389).

d) È notevole la formula seguente:

$$a^2 \cdot \operatorname{div} u = \{\operatorname{grad}(u \times a) - \operatorname{rot}(u \times a)\} \times a \tag{12}$$

qualunque sia il vettore costante a.

Infatti dalle formule (10), (11) si ha

$$a^2 \cdot \operatorname{div} u = a^2 \cdot \Sigma i \times \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \Sigma \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \times a \cdot i \times a - i \times a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \times a + i \times \frac{\partial u}{\partial x} \cdot a \times a \right\}$$

$$= \Sigma \left\{ \frac{\partial (u \times a)}{\partial x} i - i \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} \times a \right) \right\} \times a \,. \qquad \text{c. d. d.}$$

4. Prodotti degli operatori, grad, div, rot. — Se m è numero reale ed u è vettore, funzioni del punto P si ha

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} m = 0 \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0. \tag{2}$$

Vedremo in altro capitolo i reciproci di questi teoremi.

Infatti, per formule già note si ha:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} m \times dP \times \delta P = d \operatorname{grad} m \times \delta P - \delta \operatorname{grad} m \times dP$$
$$= d\delta P - \delta dP = 0;$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} u \cdot dP \times \delta P \times \vartheta P = d \operatorname{rot} u \times \delta P \times \vartheta P + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$= d\,\delta u \times \vartheta P - \vartheta u \times \delta P + \ldots\ldots + \ldots\ldots = 0;$$

(1) Con gli operatori grad, div, rot, non si può esprimere

$$\operatorname{grad}(u \times v), \quad \operatorname{rot}(u \times v),$$

neanche nel caso particolare che v sia costante, cioè indipendente da P.

Occorre introdurre le *derivate rispetto ad un punto*, come si è fatto nel Vol. I di *Analyse vectorielle générale* già citata, e allora si ha

$$\operatorname{grad}(u \times v) = \mathrm{K} \frac{du}{dP} v + \mathrm{K} \frac{dv}{dP} u$$

$$\operatorname{rot}(u \times v) = \left(\operatorname{div} v - \frac{dv}{dP}\right) u - \left(\operatorname{div} u - \frac{du}{dP}\right) v,$$

sotto forma semplice e che si presta per il calcolo effettivo e diretto. Non è possibile altra via; possiamo, bensì, cambiare la forma dei simboli, ma in qualunque modo si faccia si dovranno ritrovare gli operatori $\frac{du}{dP}$, $\mathrm{K}\frac{du}{dP}$ che sono *omografie vettoriali*.

che per l'arbitrarietà di $dP \times \partial P$, $dP \times \partial P \times dP$ dimostrano le (1), (2).

Abbiamo con ciò formato due dei cinque possibili prodotti, due a due, delle accennate funzioni. I tre prodotti

$$\text{div grad}, \quad \text{grad div}, \quad \text{rot rot}$$

non si possono esprimere mediante le funzioni note fin qui.

Nelle applicazioni si presentano i due operatori

$$(3) \qquad {}_2 \quad \text{div grad}, \qquad {}_2' \quad \text{grad div} \quad \text{rot rot}:$$

Il primo opera su di un numero e produce un numero, il secondo opera su di un vettore e produce un vettore.

Gli operatori ${}_2$, ${}_2'$, ben distinti e *definiti* dalle (3), hanno, rispetto all'algoritmo cartesiano, la forma simbolica comune

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

perchè mediante il solito sistema di riferimento si ha

$$\text{div grad } m = \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2}:$$

$$\text{grad div } \boldsymbol{u} - \text{rot rot } \boldsymbol{u} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial z^2}\ [1].$$

5. Alcune applicazioni geometriche del grad. — Se u è un numero reale funzione di P, la condizione

$$u = \text{cost.}$$

individua una superficie o una linea, secondochè P varia nello spazio o in una superficie. In ogni punto P della superficie o della linea, u ha uno stesso valore: avremo quindi

$$du = \text{grad } u \times dP = 0:$$

cioè grad u è normale in P alla superficie o alla linea u = cost.

[1] Le (1), (2) e (3) sono date da MAXWELL, l. cit. alla nota (13), che le enuncia così:

The slope of a scalar function has no curl; the curl of a vector function has no convergence; the convergence of the slope of a scalar function is its concentration; the concentration of a vector function is the slope of its convergence together with the curl of its curls.

Se, p. es., A_1, A_2 sono punti fissi, r_1, r_2 le distanze di P da A_1 e A_2 e

$$u = f(r_1, r_2),$$

allora per $u = \text{cost.}$, P descrive una superficie di rivoluzione di asse A_1A_2. La normale ad essa in un punto P è parallela al vettore

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial f}{\partial r_1}\,\text{grad}\, r_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}\,\text{grad}\, r_2,$$

che si costruisce come somma di due vettori unitari diretti da A_1, A_2 a P, moltiplicati per i numeri $\frac{\partial f}{\partial r_1}$, $\frac{\partial f}{\partial r_2}$. E si ottengono di qui subito le note costruzioni per la normale all'ellisse, iperbole, ovali di Cassini, di Cartesio, ecc., essendo

$$u = r_1 + r_2, \quad u = r_1 r_2, \text{ ecc.}$$

b) Si possono risolvere semplicemente questioni di massimo e minimo [1] osservando che:

Se il numero u funzione di P, ammette nel punto P_0 (del campo di variazione di P) un massimo o un minimo, allora il grad u in P_0 è nullo.

Se il numero u funzione di P, ammette nel punto P_0 di una superficie o linea un massimo o minimo, allora il grad u in P_0 è normale alla superficie o linea.

Così se r_1, r_2, r_3 sono le distanze di un punto P da tre punti A_1, A_2, A_3 non collineari, la funzione

$$u = r_1 + r_2 + r_3$$

ha un minimo nel punto O del piano $A_1A_2A_3$ tale che i vettori $A_1 - O$, $A_2 - O$, $A_3 - O$ formino due a due angoli di 120°, perchè in tal punto

$$\text{grad}\, u = \text{grad}\, r_1 + \text{grad}\, r_2 + \text{grad}\, r_3 = 0.$$

Se ad es., r_1, r_2 sono le distanze di un punto P di una superficie o linea, dai due punti fissi A_1, A_2, la funzione

$$u = r_1 + r_2$$

ha un minimo nel punto P_0 della superficie o linea nel quale

[1] M. Borrasso, *Teoremi su massimi e minimi...* (Atti R. Acc. Torino, vol. 51, 1916).

il raggio incidente A_1P_0 fa con la normale in P_0 un angolo eguale a quello fatto dal raggio riflesso P_0A_2 con la stessa normale; perchè in tal punto

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} r_1 + \operatorname{grad} r_2$$

ha la direzione della bisettrice dell'angolo $A_1P_0A_2$.

Se r_i $(i = 1, \ldots, n)$ è la distanza di P da A_i e si pone

$$u = \Sigma r_i^2; \quad G = \frac{\Sigma A_i}{n},$$

allora si ha:

$$\operatorname{grad} u = 2\Sigma r_i \operatorname{grad} r_i = 2\Sigma (P - A_i) = 2n(P - G);$$

quindi: « il baricentro G dei punti A_i è il punto per cui è minima u »: « il piede della perpendicolare condotta da G ad un piano o ad una retta, è il punto del piano per cui u è minimo ».

Lo stesso può dirsi per una superficie o linea, con convenienti restrizioni.

c) L'equazione di una superficie, in coordinate cartesiane ortogonali, sia

$$u = f(x, y, z) = 0.$$

Si ha

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k;$$

quindi l'equazione del piano tangente in P alla superficie è

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

d) Consideriamo le traiettorie ortogonali di un sistema di ∞^1 linee piane definite da

$$u = f(r_1, r_2) = \text{cost.}$$

essendo r_1, r_2 le distanze di P da due punti fissi A_1, A_2.

Il vettore $\operatorname{grad} u$ ha la direzione della normale in P alla linea del sistema che vi passa e quindi $i \operatorname{grad} u$ è la direzione della normale alla traiettoria ortogonale che passa per P. Se si riesce a porre

$$i \operatorname{grad} u = h \operatorname{grad} v,$$

ove h è un numero, r un numero funzione di P, allora:

$$r = \text{cost.}$$

è l'equazione delle traiettorie ortogonali cercate.

Se p. es., abbiamo

$$u = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = \text{cost.}$$

(con m_1 e m_2 costanti, *curva equipotenziale di Cayley*), e diciamo α_1, α_2 gli angoli che i vettori $P - A_1$, $P - A_2$ fanno con $A_1 A_2$, si può porre (essendo h reciproco della distanza di P dalla retta $A_1 A_2$)

$$\frac{1}{r_1} = h \operatorname{sen} \alpha_1, \quad \frac{1}{r_2} = h \operatorname{sen} \alpha_2. \qquad (h \text{ numero})$$

Inoltre

$$i \operatorname{grad} u = -\frac{m_1}{r_1^2} i \operatorname{grad} r_1 - \frac{m_2}{r_2^2} i \operatorname{grad} r_2 = -\left(\frac{m_1}{r_1} \operatorname{grad} \alpha_1 + \frac{m_2}{r_2} \operatorname{grad} \alpha_2\right)$$

per la (7) del n. 2; e quindi ancora

$$i \operatorname{grad} u = -h(m_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{grad} \alpha_1 + m_2 \operatorname{sen} \alpha_2 \operatorname{grad} \alpha_2)$$
$$= h \operatorname{grad}(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2).$$

L'equazione delle traiettorie ortogonali è dunque

$$m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2 = \text{cost.}$$

Come altro esempio, si considerino le *linee equipotenziali*

$$r^2 \cos \alpha = \text{cost.}$$

per un elemento magnetico (r ed α al posto di r_1 e α_1 rimanendo A_2 arbitrario). Si ha

$$i \operatorname{grad} \frac{r^2}{\cos \alpha} = \frac{2r}{\cos \alpha} i \operatorname{grad} r + \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \operatorname{sen} \alpha \cdot i \operatorname{grad} \alpha$$
$$= \frac{2r^2}{\cos \alpha} \operatorname{grad} \alpha - \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \operatorname{grad} r$$
$$= \frac{r \operatorname{sen}^2 \alpha + 2r \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} \operatorname{grad} \alpha - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \operatorname{grad} r$$
$$= -\frac{r \operatorname{sen}^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} \operatorname{grad} \frac{r}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

e quindi l'equazione delle *linee di forza* è

$$r \operatorname{sen}^2 \chi = \text{cost}$$

c) Conserviamo le notazioni di *d*). La condizione

$$r_1 r_2 = \text{cost.}, \quad \text{o la equivalente,} \quad \log r_1 + \log r_2 = \text{cost.}$$

definisce le *circonferenze di Apollonio* relative alla coppia di punti A_1, A_2. Ora si ha

$$i \operatorname{grad} (\log r_1 + \log r_2) = \operatorname{grad} \chi_1 + \operatorname{grad} \chi_2 = \operatorname{grad} (\chi_1 + \chi_2)$$

e quindi: *le traiettorie ortogonali delle circonferenze di Apollonio relative alla coppia di punti A_1, A_2 sono le circonferenze che passano per A_1 e A_2* (di equazione $\chi_1 + \chi_2 = \text{cost.}$).

È interessante confrontare il metodo così semplice e rapido ora seguito, con quello cartesiano ordinario.

Sia $2a$ la distanza di A_1 da A_2. Prendiamo $(A_1 + A_2)/2$ come origine di un sistema cartesiano ortogonale del quale la retta $A_1 A_2$ è l'asse delle x. Le circonferenze che passano per A_1, A_2 hanno per equazione

$$x^2 + y^2 - 2uy = a^2$$

essendo u un parametro arbitrario. L'equazione differenziale di questo sistema ∞^1 di circonferenze è

$$2xy\,dx + (y^2 - x^2 + a^2)\,dy = 0.$$

Se in questa cambiamo dx, dy in dy, $-dx$ si ottiene

$$(a) \qquad 2xy\,dy - (y^2 - x^2 + a^2)\,dx = 0$$

che è l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali.

Dividendo la (*a*) per x^2 si ha

$$\frac{2xy\,dy - y^2 dx}{x^2} + \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) dx = 0,$$

$$d\left(\frac{y^2}{x}\right) + d\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = 0;$$

integrando, moltiplicando per x e indicando con c un parametro arbitrario si ha, come equazione delle traiettorie ortogonali,

$$(b) \qquad x^2 + y^2 - cx + a^2 = 0.$$

sistema ∞^1 di circonferenze con i centri sulla retta A_1A_2. Ma non basta ancora: per dimostrare che la b è l'equazione del sistema di Apollonio, bisogna ancora provare che: il rapporto delle distanze da A_1 e A_2 di un punto qualunque di una arbitraria delle circonferenze b è costante, il che richiede lunghi calcoli. È questo un notevole esempio delle complicazioni alle quali conducono le coordinate cartesiane usate *sistematicamente* come mezzo di ricerca o di dimostrazione.

f) Essendo r, φ i soliti elementi delle coordinate polari e u un parametro arbitrario, il sistema ∞^1 di equazione

$$r^n = u^n \operatorname{sen} n\varphi, \quad \text{ovvero} \quad r^n \operatorname{sen} n\varphi = \text{cost.} = u^n,$$

è formato dalle linee che si ottengono da una *spirale sinusoide di ordine* n, applicando ad essa tutte le omotetie che hanno per centro il centro della spirale, che è origine delle coordinate polari.

Per formule ben note si ha

$$i \operatorname{grad} u^n = i\,\frac{nr^{n-1}\operatorname{sen} n\varphi \cdot \operatorname{grad} r - nr^n \cos n\varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi}{\operatorname{sen}^2 n\varphi}$$

$$= \frac{nr^n \operatorname{sen} n\varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi + nr^{n-1} \cos n\varphi \cdot \operatorname{grad} r}{\operatorname{sen}^2 n\varphi}$$

$$= \cot^2 n\varphi \cdot \frac{\cos n\varphi \cdot \operatorname{grad} r^n - r^n \cdot \operatorname{grad} \cos n\varphi}{\cos^2 n\varphi}$$

$$= \cot^2 n\varphi \cdot \operatorname{grad} \frac{r^n}{\cos n\varphi}.$$

Le traiettorie ortogonali hanno, dunque, per equazione polare

$$r^n = k^n \cos n\varphi = k^n \operatorname{sen} n\left(\frac{\pi}{2n} \pm \varphi\right)$$

e si ottengono dando al primitivo sistema una rotazione di $\pi/2n$ radianti intorno all'origine. Il lettore osservi che per: $n = 1$, *circonferenze*; $n = -1$, *rette*; $n = 2$, *lemniscate*; $n = -2$, *iperboli equilatere*; $n = 1/2$, *cardioidi*; $n = -1/2$, *parabole*.

APPENDICE ALLA PARTE PRIMA

Formazioni geometriche.

Il *calcolo vettoriale* (o, in generale, *geometrico*) deve porre il matematico in condizione di poter risolvere *direttamente* una qualsiasi questione di geometria, di meccanica, di fisica, sotto *forma assoluta*, cioè *indipendente da qualsiasi sistema di riferimento* (con *zero* coordinate): altrimenti, come avviene per i sistemi vettoriali comuni, in luogo di *operazioni* ed *operatori* per gli enti geometrico-fisico-meccanici, si hanno semplicemente dei *tachigrafi* per le coordinate e queste *continuano* ad essere *elementi indispensabili del calcolo*. Ora è ovvio che una qualsiasi questione di geometria, di meccanica, di fisica è *indipendente* da un arbitrario sistema di riferimento e quindi può, e deve, esser trattata indipendentemente da coordinate [1].

Il sistema vettoriale (*punto*, *vettore*, $\mathbf{F}_1$, $+$, $-$, prodotto per un numero reale, $\times$, $\wedge$, i, $e^{i\varphi}$, grad, rot, div) esposto nei precedenti capitoli I-VI, e che può chiamarsi *sistema minimo*, basta per risolvere, *sotto forma assoluta*, numerose questioni, come il lettore può vedere nella Parte seconda di questo libro. Per la risoluzione *assoluta* di molte altre, occorre unire al *sistema minimo* le *omografie vettoriali*, o *trasformazioni lineari di vettori in vettori* da noi già ampiamente trattate [2] e che, da molti Autori, sono state applicate a svariate questioni, le une note le altre nuove [3].

[1] Gli ordinari *invarianti*, *covarianti*, ecc., provengono dalle coordinate e soltanto da queste; essi spariscono del tutto nel calcolo assoluto.

[2] C. Burali-Forti e R. Marcolongo. *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla Fisica-Matematica* (G. B. Petrini, Torino, 1909). *Analyse vectorielle générale*: vol. I, *Transformations linéaires* e vol. II, *Applications à la Mécanique et à la Physique* (S. Lattes, Torino, 1912, 1913).

[3] Cfr. *Bibliografia*, alla fine di questo volume.

Ma il *sistema minimo* e le *omografie vettoriali* non bastano ancora per molte altre questioni; ne esaminiamo alcune.

Una forza f, qualunque sia la sua definizione fisica, è una *funzione* di un *punto* P, punto nel quale la si *applica*, e di un vettore $\boldsymbol{u}$ che dà la *grandezza*, la *direzione* e il *verso* della forza f. Ma le forze si comportano rispetto a P ed $\boldsymbol{u}$ in modo ben diverso secondochè agiscono su corpi *deformabili*, o *rigidi*.

Se si tratta di un corpo *deformabile*, allora, non solo f è funzione di P ed $\boldsymbol{u}$, ma tanto P quanto $\boldsymbol{u}$ sono funzioni di f, perchè la forza individuata da P' ed $\boldsymbol{u}'$ è *identica* alla forza f solo quando $P = P'$ ed $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$. È per questa ragione che P può chiamarsi *punto di applicazione* della forza f ed $\boldsymbol{u}$ *vettore della forza* f. In conseguenza la condizione di equilibrio

$$\Sigma \boldsymbol{u} = 0, \quad \Sigma P = 0$$

di un *sistema di forze* applicate ad un corpo *deformabile*, contiene elementi *tutti essenziali* e la si esprime sotto forma semplicissima, *assoluta*, mediante gli elementi del *sistema minimo*.

Se, invece, la forza f, funzione di P ed $\boldsymbol{u}$, agisce su di un *corpo rigido*, allora $\boldsymbol{u}$ è ancora una *funzione* di f, un *elemento essenziale*, ma P non è una funzione di f perchè si può sostituire a P un punto qualunque della *linea di azione* di f e invariabilmente collegato con P. In altri termini: per una forza f applicata ad un *corpo rigido* si hanno ancora *due* funzioni di f da considerare; una è, come per i corpi deformabili, il *vettore* $\boldsymbol{u}$ di f; l'altra non è più il *punto di applicazione*, che risulta essere una pseudo-funzione, ma sibbene la *linea di azione* di f. Ora col *sistema minimo la condizione di equilibrio di un sistema di forze applicate ad un corpo rigido* si esprime con due condizioni

$$\Sigma \boldsymbol{u} = 0, \quad \Sigma (P - O) \wedge \boldsymbol{u} = 0 \text{ (5)},$$

la prima *essenziale* (vale a dire *assoluta* o *funzione del sistema*), la seconda *doppiamente accidentale*, perchè contiene i punti P che *non sono funzioni delle forze del sistema* e il punto arbitrario O che è *assolutamente estraneo al sistema e al corpo*.

Inconvenienti ancor più gravi si presentano in geometria. Due punti distinti A, B determinano una *retta* a, tre punti non collineari A, B, C determinano un *piano* α; il sistema minimo non permette di esprimere sotto forma assoluta a ed α per mezzo di A, B, C che pure sono elementi *accidentali* di a ed α, ma dà soltanto il punto generico di a ed α,

$$A + xB - A, \quad A + xB - A + yC - A.$$

(5) Cfr. ad es., C. Burali-Forti e T. Boggio, *Meccanica razionale* (Collezione Lattes, 1921).

per mezzo degli elementi accidentali A, B, C e dei numeri x, y del tutto estranei agli elementi geometrici a, z. Si hanno delle formule complicate per il *punto comune ad una retta e ad un piano*, per la *retta comune a due piani*, e sempre mediante punti *accidentali* e numeri estranei agli enti geometrici considerati.

È dunque necessario ampliare il sistema minimo in modo da poter risolvere tutte le questioni sotto forma assoluta. Basta per questo, oltre le $\mathbf{F}_1$ già studiate nel Cap. III, introdurre le *formazioni geometriche di seconda e terza specie*, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, e il *prodotto alternato*. In questa Appendice diamo un rapido cenno della teoria delle **F**, quanto basta perchè il lettore comprenda l'importanza e la necessità di esse, rimandando ai trattati speciali per un completo sviluppo [1]; ma nella Parte seconda di questo libro facciamo uso soltanto del *sistema minimo* vettoriale escludendo le *omografie vettoriali* e le *formazioni geometriche*. Diamo la teoria delle **F** sotto una forma che concorda con quella *concreta* e *semplicissima* stabilita da G. Peano [2], poichè il calcolo primitivo stabilito da H. Grassmann non è un calcolo geometrico, ma un calcolo di matrici e determinanti, un sistema di tachigrafi per le coordinate, quindi ben lontano dal calcolo *assoluto* che è indispensabile per le applicazioni. Sviluppiamo la teoria delle **F** facendo uso di quanto si è esposto nei capitoli I-VI precedenti (sebbene possa trattarsi indipendentemente da tali nozioni, come risulta dai libri sopra citati), per provare, con fatti, che il *sistema minimo* da noi stabilito *non è impotente*, come a taluno è piaciuto di affermare, ma è invece atto a dare il più ampio calcolo geometrico [3].

(1) C. Burali-Forti. *Introduction à la Géométrie différentielle* (Gauthier-Villars, Paris, 1897). *Lezioni di Geometria metrico-proiettiva* (Bocca, Torino, 1904). *Geometria analitico-proiettiva* (G. B. Petrini, Torino, 1909).

(2) *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* (Bocca, Torino, 1888).

Per le formazioni geometriche, pure sotto forma assoluta, negli spazi ad n dimensioni, cfr. le recenti note di A. Pensa, *Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un S_n euclideo*. (Atti R. Istituto veneto, vol. 79).

(3) Comprese le *omografie vettoriali*, come risulta dal citato Vol. I di *Analyse vectorielle générale*. Nella *Appendice* alla fine di questo volume, deduciamo dal *sistema minimo* anche i *quaternioni* di Hamilton, sia per far vedere ancora una volta come il sistema minimo non sia impotente, sia per far vedere quali notevoli errori si siano dedotti dal mirabile edificio quaternioniale stabilito da Hamilton. Peraltro è importante far notare subito che i *quaternioni*, oltre dare un calcolo *complesso* e troppo *diverso da quello algebrico comune* (mentre il calcolo delle **F** stabilito da Peano è simile a quello algebrico e semplicissimo), sono del tutto impotenti per stabilire, da soli, un calcolo geometrico generale ed *assoluto*.

1. **Forme eguali.** — *a*) Noi abbiamo definito nel Cap. III le *forme geometriche di prima specie*, $\mathbf{F}_1$, il cui calcolo coincide col *calcolo baricentrico* di Möbius. In modo analogo definiamo le *forme geometriche di seconda e terza specie*, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$.

Se x_i sono *successioni* di *numeri reali* e A_i, B_i, C_i sono *successioni* di *punti*, $i = 1, 2, \ldots, n$, con le *notazioni simboliche*

$$(0)\quad \begin{cases} x_1A_1B_1 + x_2A_2B_2 + \ldots + x_nA_nB_n \quad \text{o brevemente} \quad \sum_1^n x_iA_iB_i \\ x_1A_1B_1C_1 + x_2A_2B_2C_2 + \ldots + x_nA_nB_nC_n, \quad \text{»} \quad \sum_1^n x_iA_iB_iC_i \end{cases}$$

indichiamo gli *operatori* (a sinistra) tali che

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\sum_1^n x_iA_iB_i\right)(P, Q) = \sum_1^n x_i \operatorname{Vol}(A_i, B_i, P, Q), \\ \left(\sum_1^n x_iA_iB_iC_i\right)P = \sum_1^n x_i \operatorname{Vol}(A_i, B_i, C_i, P) \end{cases}$$

qualunque siano i punti P, Q.

Risulta che $\sum_1^n x_iA_iB_i$ è *operatore tra coppie di punti e numeri reali*, mentre $\sum_1^n x_iA_iB_iC_i$ è *operatore tra punti e numeri reali*, l'uno e l'altro univocamente individuati dalle successioni x_i, A_i, B_i, C_i.

Gli operatori (0), definiti dalle (1), si chiamano *forme geometriche di seconda e terza specie*, brevemente $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$.

Indicheremo una $\mathbf{F}_2$ o $\mathbf{F}_3$ con una sola lettera. Dicendo che « s è una $\mathbf{F}_2$ », ovvero « σ è una $\mathbf{F}_3$ » intendiamo dire che esistono, almeno, le successioni x_i, A_i, B_i, C_i tali che

$$s = \sum_1^n x_iA_iB_i, \quad \sigma = \sum_1^n x_iA_iB_iC_i$$

e le notazioni

$$s(P, Q), \quad \sigma P$$

hanno lo stesso significato dei primi e secondi membri delle (1).

b) La *condizione di eguaglianza* di due $\mathbf{F}_2$ o $\mathbf{F}_3$ si esprime facilmente mediante i vettori e le operazioni $+$, $\cdot$ come si è fatto per le $\mathbf{F}_1$.

Si ha

$$(2)\quad \sum_1^n x_iA_iB_i = \sum_1^m x'_iA'_iB'_i, \quad \sum_1^n x_iA_iB_iC_i = \sum_1^m x'_iA'_iB'_iC'_i$$

solamente quando

$$(3)\quad \begin{cases} \sum_1^n x_i(A_i - O) \wedge (B_i - O) = \sum_1^m x'_i(A'_i - O) \wedge (B'_i - O) \\ \sum_1^n x_i(A_i - O) \wedge (B_i - O) \cdot (C_i - O) = \sum_1^m x'_i(A'_i - O) \wedge (B'_i - O) \cdot (C'_i - O) \end{cases}$$

qualunque sia il punto O.

Infatti. In virtù della definizione (1) vale la prima delle (2) solamente quando, per O, P punti arbitrari si ha

$$\sum_1^n x_i \operatorname{Vol}(A_i, B_i, O, P) = \sum_1^m x_i' \operatorname{Vol}(A_i', B_i', O, P),$$

vale a dire

$$\sum_1^n x_i (A_i - O) \wedge (B_i - O) \wedge (P - O) = \sum_1^m x_i' (A_i' - O) \wedge (B_i' - O) \wedge (P - O),$$

o ancora

$$\left\{ \sum_1^n x_i (A_i - O) \wedge (B_i - O) - \sum_1^m x_i' (A_i' - O) \wedge (B_i' - O) \right\} \wedge (P - O) = 0,$$

che per essere $P - O$ vettore arbitrario, indipendente da O, dimostra la prima delle (3). In modo analogo per la seconda delle (3).

2. **Forme nulle.** — Noi diremo che « s è una $\mathbf{F}_2$ nulla » ovvero che « τ è una $\mathbf{F}_3$ nulla », quando

$$s(P, Q) = 0, \quad \tau P = 0$$

qualunque siano i punti P, Q.

Risulta che *esiste almeno una* $\mathbf{F}_2$ o $\mathbf{F}_3$ *nulla* (ad es. quando i numeri x_i sono tutti nulli) e (cfr. n. 1) che tale forma è *unica*.

Indicheremo col simbolo 0 (zero) la $\mathbf{F}_2$, o $\mathbf{F}_3$, nulla, senza che vi sia pericolo di equivoci.

Operando come nel n. 1 si ha subito che:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum_1^n x_i A_i B_i = 0, & \sum_1^n x_i A_i B_i C_i = 0 \\ \textit{solamente quando} & \\ \sum_1^n x_i (A_i - O) \wedge (B_i - O) = 0, & \sum_1^n x_i (A_i - O) \wedge (B_i - O) \wedge (C_i - O) = 0 \\ \textit{qualunque sia il punto } O. & \end{array} \right.$$

3. **Forme di quarta specie.** — Per analogia con le notazioni simboliche (0) poniamo

$$(5) \quad \sum_1^n x_i A_i B_i C_i D_i = \sum_1^n x_i \operatorname{Vol}(A_i, B_i, C_i, D_i)$$
$$= \frac{1}{6} \sum_1^n x_i (B_i - A_i) \wedge (C_i - A_i) \wedge (D_i - A_i)$$

e diciamo che il primo membro della (5), *notazione simbolica*, è una *forma di quarta specie*, brevemente una $\mathbf{F}_4$.

Risulta che le $\mathbf{F}_1$ sono *numeri reali*; mentre le $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ sono *operatori*, a sinistra, tra *terne di punti*, o *coppie di punti*, o *punti*, e *numeri reali*, rispettivamente.

4. **Somma e prodotto per un numero.** — Per definire la *somma* di due $\mathbf{F}_2$, od $\mathbf{F}_3$, e il prodotto di una $\mathbf{F}_2$, o $\mathbf{F}_3$, per un numero reale, basta ripetere quanto si è fatto nel n. 2 del Cap. III. Se s, s' sono $\mathbf{F}_2$, τ, τ' sono $\mathbf{F}_3$ e h è numero reale si definisce

$$s + s', \quad hs \qquad e \qquad \tau + \tau', \quad h\tau$$

come la $\mathbf{F}_2$, o $\mathbf{F}_3$, rispettivamente, tale che

$$\begin{aligned} (s + s')(P, Q) &= s(P, Q) + s'(P, Q), & (hs)(P, Q) &= h\{s(P, Q)\} \\ (\tau + \tau')P &= \tau P + \tau' P, & (h\tau)P &= h(\tau P) \end{aligned}$$

qualunque siano i punti P, Q.

Se a, b, c, d sono delle $\mathbf{F}_r$ ($r = 1, 2, 3$) e h, k dei *numeri reali*, si dimostra facilmente, valendosi delle (3), (4), che:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a + b \quad \text{è una} \quad \mathbf{F}_r \\ \text{da} \quad a = b \quad \text{e} \quad c = d \quad \text{segue} \quad a + c = b + d \\ a + 0 = 0 + a = a \\ a + b = b + a \\ a + (b + c) = (a + b) + c \\ \text{da} \quad a = b \quad \text{e} \quad h = k \quad \text{segue} \quad ha = kb \\ \text{da} \quad ha = 0 \quad \text{segue} \quad h = 0, \quad \text{ovvero} \quad a = 0 \\ h(a + b) = ha + hb, \quad (h + k)a = ha + ka \\ h(ka) = (hk)a \end{array} \right.$$

Se, come si fa in Algebra, si conviene di porre

$$(7) \qquad -a = (-1)a, \quad a - b = a + (-b), \quad a/h = (1/h)a,$$

allora si vede subito che: ***tutte le regole di calcolo algebrico per le operazioni +, — e per il prodotto e quoto per un numero reale, si applicano alle*** **F**.

5. **Prodotto alternato progressivo.** — Per poter introdurre nel calcolo, e come *elementi assoluti*, le *rette*, i *piani*, le *forze applicate ad un corpo rigido*, occorre introdurre, con H. GRASSMANN, il *prodotto alternato*. Noi lo definiremo per ora in un caso particolare [cfr. n. 14 di questa Appendice].

Chiameremo ***prodotto alternato progressivo*** *di una* **F** *per una* $\mathbf{F}_s$, *con* $r + s \leq 4$, *la* $\mathbf{F}_{r+s}$, *che si ottiene dalle espressioni simboliche* (6) *delle due forme date, come in Algebra si ottiene il prodotto di due poli-*

nomi, avendo peraltro cura di non cambiare l'ordine delle lettere che indicano punti nelle due espressioni.

L'*operazione*, prodotto alternato, ora definita, sarà indicata col simbolo $\bigcirc$. Vale a dire: se a è una F_r e b è una F_s, con $r + s < 4$, indicheremo con

$$a \bigcirc b$$

il *prodotto alternato (progressivo)* di a per b. Come d'uso *sottintenderemo* spesso il simbolo $\bigcirc$ e scriveremo, semplicemente, ab in luogo della notazione completa $a \bigcirc b$; peraltro il simbolo $\bigcirc$ *non* può esser *soppresso*, chè altrimenti si potrebbe giungere, in certi casi, a *notazioni assurde* (¹).

Così, ad es., per il prodotto alternato di una F_1 per una F_2 e sottintendendo il simbolo $\bigcirc$ si ha

$$(3A_1 - 2A_2 + 5A_3)(4B_1C_1 - 3B_2C_2) =$$
$$12A_1B_1C_1 - 9A_1B_2C_2 - 8A_2B_1C_1 + 6A_2B_2C_2 + 20A_3B_1C_1 - 15A_3B_2C_2.$$

Dalla definizione di prodotto alternato e dal n. 1 risultano facilmente le proprietà seguenti.

Se a, a' sono delle F_r, b, b' delle F_s, c è una F_t, con $r + s < 4$, $r + s + t \leqq 4$, e h è un numero reale, allora, sottintendendo il simbolo $\bigcirc$,

$$(8)\quad \begin{cases} ab \text{ è una } F_{r+s} \\ (ab)c \text{ e } a(bc) \text{ sono delle } F_{r+s+t} \\ \text{da } a = a' \text{ e } b = b' \text{ segue } ab = a'b' \\ a0 = 0a = 0 \\ (a + a')b = ab + a'b, \quad a(b + b') = ab + ab' \\ h(ab) = (ha)b = a(hb) \\ a(bc) = (ab)c, \text{ e si scriverà } abc \text{ come in Algebra} \\ (ab) = (-1)^{rs}ba. \end{cases}$$

Queste proprietà, le due prime e l'ultima eccettuate, sono analoghe

(¹) La notazione tedesca $[ab]$, in luogo di $a \bigcirc b$ [cfr. ad es. H. Grassmann figlio in *Projektive Geometrie der Ebene*, Teubner, Leipzig, 1909] è assolutamente da escludersi. È, infatti, chiaro che: se ab rappresenta già il prodotto, i segni [ ] sono inutili; se $[ab]$ deve rappresentare una *funzione binaria* di a e di b, allora il simbolo di funzione è [ ], *contrariamente a tutte le regole usuali dell'Algebra*, perchè un simbolo di funzione deve esser dato da *un solo* segno da scriversi a sinistra, o a destra, dell'ente cui si applica. Giova notare che la rappresentazione del prodotto alternato $a \bigcirc b$ mediante una funzione binaria di (a, b) è assolutamente da sconsigliarsi, perchè si perdono (*principio di permanenza*) le utili analogie col calcolo algebrico ordinario [cfr. C. Burali-Forti, *Logica Matematica*, 2ª edizione, Cap. II, § 4, n. 5 (Manuali Hoepli, 1919)].

a quelle del prodotto algebrico ordinario. Vedremo presto (cfr. n. 8) quali sono le differenze caratteristiche tra i due prodotti.

6. **Notazione effettiva.** — Si è già stabilito (cfr. Cap. III) che se A è un punto, A è pure una F_1 identica ad $1A$.

Da questo, da quanto si è esposto nei precedenti nn. 4, 5, e sottinteso il simbolo $\bigcirc$, risulta che le *notazioni simboliche* 0 divengono ***notazioni effettive.*** Invero: AB, ABC, $ABCD$ sono prodotti alternati di 2, 3, 4, F_1 particolari (punti), i prodotti di esse per numeri sono particolari F_2, F_3, F_4, le loro somme sono F_2, F_3, F_4. Così il calcolo algebrico viene esteso ai punti, e vedremo con quali grandi vantaggi.

In particolare chiameremo *bipunti* o *tripunti*, i prodotti alternati di *due* o *tre* punti.

7. **Interpretazione geometrica.** — Vedremo in seguito il significato geometrico delle F e in generale; per ora ci limitiamo ai casi particolari, *fondamentali*, seguenti, nei quali A, B, C, D, E, F sono dei *punti*.

$ABCD = 0$ equivale a « i punti A, B, C, D sono *complanari* »
$ABC = 0$ » « i punti A, B, C sono *collineari* »
$AB = 0$ » « i punti A, B *coincidono*, cioè $A = B$ ».

$ABC = DEF$ equivale a
1° A, B, C, D, E, F sono *complanari*
2° i triangoli di vertici A, B, C e D, E, F, hanno *egual area*
3° le due successioni A, B, C e D, E, F, presentano il *medesimo senso di percorso*.

$AB = CD$ equivale a
1° A, B, C, D sono *collineari*
2° i segmenti AB, CD hanno *egual lunghezza*
3° il verso da A a B è identico al verso da C a D [1].

Le relazioni, così semplici, sopra considerate a sinistra, esprimono fatti geometrici (a destra) assai complessi; ciò prova la *potenza* e *semplicità* del prodotto *alternato*. Giova notare che il tripunto ABC è ente

[1] Da $AB = CD$ segue $B - A = D - C$; ma da $B - A = D - C$ non segue, in generale, $AB = CD$ perchè la condizione 1ª può non esser soddisfatta. Il bipunto AB è dunque un ente ben diverso dal vettore $B - A$. Molti chiamano *vettore scorrevole* (vecteur glissant) un ente che coincide, in sostanza, col bipunto AB; ora, secondo le comuni leggi grammaticali, un ente che è *vettore scorrevole* è *vettore* ed è *scorrevole*, ma AB non è un *vettore* e quindi la denominazione *vettore scorrevole* è del tutto impropria.

adatto a rappresentare il *piano* determinato dai punti A, B, C, come il bipunto AB è ente adatto a rappresentare, sia la *retta* determinata dai punti A, B, sia la *forza*, applicata a corpo rigido, della quale $B - A$ è il *vettore* e la retta per A e B è quella che si chiama *linea di applicazione* (cfr. n. 12 e n. 10, rispettivamente, di questa Appendice).

8. **Differenze caratteristiche tra il prodotto alternato e il prodotto algebrico.** — Il lettore, che supponiamo conosca l'algoritmo algebrico, deve ora specialmente fissare la sua attenzione su quelle regole di calcolo geometrico che differiscono da quelle del calcolo algebrico.

a) *Il prodotto alternato di due* **F** *di ordine dispari non è commutabile; ma il cambiamento dell'ordine dei due fattori produce soltanto* ***un cambiamento di segno.*** Ciò risulta dall'ultima delle (8).

In particolare se A, B, C, D sono delle $\mathbf{F}_1$ si ha

$$AB = -BA$$
$$ABC = -ACB = -BAC = -CBA = \ldots.$$
$$ABCD = -BACD = -ACBD = -ABDC = \ldots.$$

proprietà che hanno le analoghe nella teoria dei determinanti.

Se in un prodotto di $\mathbf{F}_1$ *(in numero di* 2, 3, 4) *due fattori sono* ***eguali, allora il prodotto è nullo,*** perchè dall'essere $AA = -AA$ risulta subito $AA = 0$.

Abbiamo già veduto che un *vettore* è una $\mathbf{F}_1$. Se, ora, O è un *punto* ed $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ dei *vettori*, si ha identicamente

$$Ou = O(O + \boldsymbol{u})$$
$$Ouv = O(O + \boldsymbol{u})(O + \boldsymbol{v})$$
$$Ouvw = O(O + \boldsymbol{u})(O + \boldsymbol{v})(O + \boldsymbol{w})$$

e quindi per quanto si è detto alla fine del n. 7:

Ou può rappresentare « la *retta* passante per O e parallela ad $\boldsymbol{u}$ »
Ouv » » « il *piano* » » parallelo ad $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ »:

invece $Ouvw$ è numero reale e si ha precisamente

$$Ouvw = \mathrm{Vol}\,(O,\ O + \boldsymbol{u},\ O + \boldsymbol{v},\ O + \boldsymbol{w}) = \frac{1}{6}\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}.$$

Osserviamo ancora che se A, B, C, D sono punti si ha identicamente

$$AB = A(B - A)$$
$$ABC = A(B - A)(C - A)$$
$$ABCD = A(B - A)(C - A)(D - A).$$

b) *Se* a, b, c *sono delle* **F** *e se* $a \neq 0$, *dalla eguaglianza* $ab = ac$ ***non risulta necessariamente*** $b = c$.

Ad es., se A, B, C, P, Q sono punti e $ABC \neq 0$ allora la eguaglianza

$$(ABC)P = (ABC)Q$$

non esprime che $P = Q$, ma invece esprime che « *i punti P, Q equidistano dal piano ABC e stanno dalla stessa parte di esso* ».

In generale $ab = ac$, per $a \neq 0$, esprimerà una relazione geometrica tra gli enti geometrici rappresentati da a, b, c (¹).

c) *Se il prodotto di due, o più,* **F** *è nullo, allora: o uno dei fattori, almeno, è nullo, ovvero nessuno dei fattori è nullo ed esiste una relazione geometrica tra gli enti geometrici rappresentati da questi fattori* (²).

Ad esempio, se A, B, C, D sono punti, e ricordiamo che un punto è una $\mathbf{F}_1$ non nulla, si ha:

da $(ABC) = 0$ segue, $BC = 0$, oppure « A sta nella retta BC »;

da $(AB)(CD) = 0$ segue, $AB = 0$, oppure $CD = 0$, oppure « $AB \neq 0$ e $CD \neq 0$ e i punti A, B, C, D sono complanari ».

9. **Bivettori e trivettori.** — *a*) Chiameremo (con PEANO) *bivettore* il prodotto alternato di *due* vettori e *trivettore* il prodotto alternato di *tre* vettori (³).

Il ***bivettore uv***, **prodotto alternato del vettore *u* per il vettore *v***, si *rappresenta graficamente* disegnando le *frecce* che rappresentano $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ con la stessa origine e tracciando poi una *freccia curva* diretta da $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Di solito si completa il *parallelogrammo* che si chiama *parallelogrammo rappresentativo* del bivettore.

(¹) Analogamente per i vettori e le operazioni $\times$, $\wedge$. Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sono vettori e $\boldsymbol{u} \neq 0$ si ha:

da $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$, segue $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = 0$ e quindi sarà $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, oppure $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \neq 0$ e $\boldsymbol{u}$ *normale* a $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$;

da $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$, segue $\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = 0$ e quindi sarà $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, oppure $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \neq 0$ e $\boldsymbol{u}$ *parallelo* a $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$.

È noto, invece, che se a, b, c sono numeri e $a \neq 0$, allora da $ab = ac$ segue, necessariamente, $b = c$.

(²) Invece se a, b sono numeri da $ab = 0$ segue $a = 0$ ovvero $b = 0$.

Per i vettori e le operazioni $\times$, $\wedge$ si ha:

da $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0$, segue $\boldsymbol{u} = 0$, ovvero $\boldsymbol{v} = 0$, ovvero $\boldsymbol{u} \neq 0$ e $\boldsymbol{v} \neq 0$ e $\boldsymbol{u}$ è *normale* a $\boldsymbol{v}$;

da $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = 0$, segue $\boldsymbol{u} = 0$, ovvero $\boldsymbol{v} = 0$, ovvero $\boldsymbol{u} \neq 0$ e $\boldsymbol{v} \neq 0$ e $\boldsymbol{u}$ *parallelo* a $\boldsymbol{v}$.

(³) *Il prodotto alternato di* ***quattro*** *vettori è sempre nullo.* Invero se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sono vettori, qualunque siano i punti A, B si ha sempre

$$Auvw = Buvw \quad \text{da cui} \quad (A - B)uvw = 0, \qquad \text{c. d. d.}$$

Si chiama modulo di un bivettore u, e si indica con mod u, la misura dell'area del parallelogrammo rappresentativo di u. Quindi se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sono vettori si ha

$$\text{mod}\,(\boldsymbol{uv}) = \text{mod}\,(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \text{mod}\,\boldsymbol{u} \cdot \text{mod}\,\boldsymbol{v} \cdot \text{sen}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

Affinchè i bivettori u, v siano *identici*, o *eguali*,

$$u = v,$$

è necessario e sufficiente che

$$Ou = Ov \quad (^1)$$

qualunque sia il punto O e quindi: *due bivettori sono eguali solamente quando: i loro parallelogrammi rappresentativi sono equivalenti (cioè i moduli dei due bivettori sono eguali), stanno nello stesso piano o in piani paralleli (cioè i due bivettori hanno la stessa giacitura), le due frecce arcuate hanno lo stesso verso (cioè i due bivettori hanno egual verso).*

Ne segue che un *bivettore* è un *elemento geometrico* che è individuato da *grandezza, giacitura* e *verso*. Si confronti col *vettore* che è individuato da *grandezza, direzione* e *verso*.

È ben facile dimostrare: che *la somma di due, o più, bivettori è un bivettore*; che *il prodotto di un bivettore per un numero reale è un bivettore ad esso parallelo ecc.* [cfr. con i vettori].

b) Si sa che se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sono vettori e A, B punti qualunque, si ha $\boldsymbol{Auvw} = \boldsymbol{Buvw}$. Dunque se α, β sono *trivettori* e $\alpha \neq 0$, esiste un numero reale x, ed uno solo, tale che

$$\beta = x\alpha$$

e, in conseguenza: *tutti i trivettori sono multipli di un trivettore non nullo fissato ad arbitrio.*

Si può dunque introdurre per i trivettori una operazione analoga alla *divisione* algebrica e scrivere

$$\frac{\beta}{\alpha} = x, \quad \text{o anche} \quad \beta/\alpha = x, \quad \text{in luogo di} \quad \beta = x\alpha.$$

Conviene introdurre il *trivettore unitario* Ω, che definiamo ponendo

$$\Omega = \boldsymbol{ijk}$$

essendo $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sistema, di vettori, unitario ortogonale destro, ma del resto arbitrario.

(1) Si tenga presente che si può porre, ed in infiniti modi, $u = \boldsymbol{ab}$ ove $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono vettori e quindi $Ou = O\boldsymbol{ab} = O(O + \boldsymbol{a})(O + \boldsymbol{b})$.

10. **Significato meccanico delle $\mathbf{F}_2$.** — Noi abbiamo già veduto che [cfr. Cap. III] il calcolo delle $\mathbf{F}_1$ coincide col *calcolo baricentrico* di MÖBIUS. È ora importante far vedere come le $\mathbf{F}_2$ possano rappresentare i ***sistemi di forze applicate ad un corpo rigido.***

Nel n. 7 di questa Appendice abbiamo fatto notare che il bipunto AB può, in virtù del significato della eguaglianza $AB = CD$, considerarsi come la ***forza***, *applicata ad un corpo rigido, della quale la retta che passa per A e B è la* ***linea di azione*** *e $B - A$ ne è il* ***vettore.***

In virtù della identità

$$x_i A_i B_i = A_i A_i + x_i B_i - A_i A_i$$

si vede subito che: *una $\mathbf{F}_2$ è sempre una somma di bipunti*, e quindi: *una $\mathbf{F}_2$ $(A_i B_i)$, per $i = 1, 2, \ldots, n$ è sempre una funzione di un sistema* ***di forze applicate ad uno stesso corpo rigido.***

Si considerino ora due $\mathbf{F}_2$ qualunque

$$s = \sum_1^n A_i B_i, \quad s' = \sum_1^m A_i' B_i'.$$

È noto che si ha

$$s = s' \quad \text{oppure} \quad s = 0$$

solamente quando

$$s(PQ) = s'(PQ), \quad \text{oppure} \quad s(PQ) = 0,$$

vale a dire

$$\sum_1^n A_i B_i PQ = \sum_1^m A_i' B_i' PQ, \quad \text{oppure} \quad \sum_1^n A_i B_i PQ = 0$$

comunque si fissino i punti P, Q. Ma $s(PQ)$, $s'(PQ)$ sono gli ordinari *momenti dei sistemi di forze $A_i B_i$, $A_i' B_i'$ rispetto all'asse PQ*, e quindi le condizioni $s = s'$, $s = 0$, esprimono, rispettivamente, che *s è la risultante del sistema $A_i B_i$*, oppure che *il sistema s mantiene in equilibrio il sistema materiale a cui è applicato.*

Dunque una $\mathbf{F}_2$ qualunque ***rappresenta la ordinaria risultante di un sistema di forze applicate ad un corpo rigido***; la condizione di *equivalenza* di due sistemi è $s = s'$ e di *equilibrio* è $s = 0$, e tali condizioni sono espresse sotto forma assoluta.

I ***bivettori*** rappresentano le ordinarie ***coppie***. Infatti: se ai punti qualunque A, B si applicano forze parallele di senso contrario e di eguale intensità, si ha il sistema

$$Au - Bu = (A - B)u$$

che è appunto un bivettore [1].

[1] La riduzione delle $\mathbf{F}_2$ (cfr. i libri sopra citati) dà immediatamente gli ordinari teoremi sulla composizione e decomposizione delle forze e li dà per mezzo di identità algebriche semplicissime.

Si è così visto con quale semplicità e precisione le F_2 permettono di ottenere gli ordinari elementi meccanici per i corpi rigidi. E bisogna poi tener presente che le F_1, F_2, F_3, dànno, con le medesime regole di calcolo, assai semplici e analoghe a quelle algebriche (salvo le differenze indicate nel n. 8), il vasto insieme degli elementi *geometrici* e *meccanici* de F_3 per i *corpi rigidi*, *punti* e *vettori* per i *corpi deformabili*).

11. **Operatore indice.** — Se u è un *bivettore* con la notazione, di H. Grassmann, $|u$, che si legge « indice di u », indichiamo *il vettore di modulo eguale al modulo di u, la cui direzione è normale alla giacitura di u, e il cui verso è tale che, essendo O punto arbitrario, il numero $Ou(|u)$ è o positivo o nullo.*

Segue da questo che

$$|u = x \wedge y$$

qualunque siano i vettori x, y tali che

$$u = xy$$

e quindi il verso di $|u$ è tale che la successione x, y, $|u$ è destrogira.

Se u è un vettore porremo

$$|u = « \text{ quel bivettore } u \text{ tale che } u = |u ».$$

Ne segue che le due condizioni

$$|u = u, \quad u = |u$$

esprimono la stessa cosa sotto forme diverse e che il simbolo $|$ è operatore, ad un tempo, *tra bivettori e vettori* e *tra vettori e bivettori* [4].

a) Se u è un bivettore, a è una F_1 o F_2 e h è un numero reale, noi porremo

$$a|u = a(|u) = a \bigcirc (|u), \quad h|u = h(|u),$$

vale a dire indicheremo, brevemente, con $a|u$ il prodotto alternato di a per l'indice del bivettore u, ecc.

Se u, v sono *vettori* e u, v sono *bivettori* è chiaro che:

$u|v$, $u|v$ sono dei *trivettori*,

$u|u$ è un *bivettore*.

$u|u = 0$ sempre perchè prodotto di quattro vettori.

$u|v = 0$, $u|v = 0$ esprimono, rispettivamente che, o uno dei fattori è nullo, ovvero esprimono l'*ortogonalità* di u e di v o di u e di v,

$u|u = 0$ esprime l'*ortogonalità* di u ed u.

[4]) Definito l'operatore $|$, *indice*, tra bivettori e vettori, l'operatore tra vettori e bivettori è l'*inverso* di esso e, a rigore di notazioni, dovrebbe essere indicato con $|^{-1}$. Noi seguiamo l'uso comune e diamo ad $|$ il doppio significato, perchè $|$ e $|^{-1}$ hanno lo stesso algoritmo e non si presentano inconvenienti formali notevoli.

Se A, B, C, D sono punti:

$A \rfloor (B - C)$ rappresenta il « *piano* passante per A e normale alla retta BC »,

$A \rfloor (B - D) \rfloor (C - D) \rfloor$ rappresenta la *retta* passante per A e normale al piano BCD ».

Se s è un *bipunto* e σ è un *tripunto*, non nulli, i prodotti alternati regressivi [cfr. n. 14 di questa Appendice] $s\Omega$, $\sigma\Omega$ sono, rispettivamente, un *vettore* parallelo ad s ed un *bivettore* parallelo a σ. Ne segue che $A \rfloor (s\Omega)$ e $A \rfloor (\sigma\Omega)$ rappresentano, *sotto forma assoluta* (indipendente dai punti accidentali B, C, D), il « *piano* condotto da A normalmente ad s », la « *retta* condotta da A normalmente a σ ». È importante notare come con le F e il prodotto alternato è possibile ottenere, sotto *forma assoluta*, degli elementi geometrici che non si possono ottenere con altri metodi.

b) Se u, v sono, entrambi, *vettori*, ovvero *bivettori* e h è un numero reale, si ha:

$u = u$, cioè il quadrato dell'operatore indice è una identità,

$h \rfloor u = \rfloor (hu)$,

$(u + v) = \rfloor u + \rfloor v$, teorema di VARIGNON,

$u \rfloor v = v \rfloor u$.

c) Esiste una notevole relazione tra il simbolo di operazione $\times$, prodotto interno, e l'operatore $\rfloor$, indice. Se u, v sono vettori si ha

$$u \times v = \frac{u \rfloor v}{\Omega}. \tag{9}$$

Infatti. Siano x, y vettori tali che

$$v = xy, \quad \text{cioè tali che} \quad v = x \wedge y;$$

in virtù di proprietà ben note [cfr. n. 8 di questa Appendice] si ha

$$\frac{u \rfloor v}{\Omega} = \frac{uxy}{ijk} = \frac{u \times x \wedge y}{i \times j \wedge k} = \frac{u \times (x \rfloor y)}{1} = u \times v \text{ (1)}.$$

d) Se u, v sono bivettori, si può definire il *prodotto interno* di u per v ponendo

$$u \times v = \frac{u \rfloor v}{\Omega} \tag{10}$$

e il simbolo $\times$ ha, per i bivettori, le stesse proprietà formali che ha per i vettori.

(1) La (9) può assumersi per definire il *prodotto interno* $\times$, quando si faccia la teoria delle F indipendentemente da quella dei vettori [cfr. libri citati].

e) Se u, u sono, rispettivamente, vettore e bivettore, e conveniamo di scrivere $u \times u$ al posto di $u \times (u)$, allora da *c*), *d*), si ha

$$u \times u = \frac{uu}{\Omega}, \quad u \times u = \frac{uu}{\Omega},$$

il che prova che: *non è lecito definire il prodotto interno di un vettore* u *per un bivettore* u *come rapporto tra il trivettore* uu *e il trivettore unitario, e indicarlo con* $u \times u$, *se si vuole (come è necessario per rispettare la legge di permanenza) conservare al segno* $\times$ *le sue ordinarie proprietà.* Del resto la considerazione di questo nuovo prodotto *è del tutto inutile* una volta che abbiamo introdotto i *trivettori*.

12. **Posizione delle F.** — Abbiamo già visto [cfr. Cap. III] che: *una* $\mathbf{F}_1$ *è un vettore, o il prodotto di un punto (baricentro) per un numero reale.* Chiameremo *posizione* della $\mathbf{F}_1$ considerata, non nulla, la *direzione del vettore*, o il *baricentro*.

In altri termini. Se A è una $\mathbf{F}_1$ non nulla, porremo

$$\text{posit } A = \text{« direzione del vettore } A \text{ »},$$
$$\text{posit } A = \text{« baricentro di } A \text{ »} = \frac{A}{\text{massa di } A},$$

secondoche la massa di A è nulla, cioè A è un vettore, oppure non è nulla, cioè A è il prodotto del suo baricentro per la sua massa.

Giova notare che la massa di A vale $A\Omega/6$

Se a è una $\mathbf{F}_2$ non nulla ad invariante nullo [4], ovvero è una $\mathbf{F}_3$ non nulla, allora porremo

$$\text{posit } a = \text{« luogo delle posizioni delle forme di prima specie } x \text{ tali che } xa = 0 \text{ »}.$$

Si ottengono così i *punti*, le *rette* e i *piani proiettivi*. È utile esaminare ciò rapidamente:

se A è una $\mathbf{F}_1$, posit A è un *punto proprio* o un *punto all'infinito* secondoche la *massa* di A è, o pur no, nulla;

se A, B sono punti distinti, $AB \neq 0$, posit (AB) contiene i punti propri della retta ordinaria che passa per A e B ed inoltre il punto

[4] Una $\mathbf{F}_2$ può ridursi o ad un *bipunto*, o ad un *bivettore* o alla *somma di un bipunto con un bivettore non parallelo al bipunto*. Se a è una $\mathbf{F}_2$ la condizione $aa = 0$ si verifica soltanto nei primi due casi e aa chiamasi *invariante* di a.

La condizione $aa = 0$ esprime che a è il prodotto alternato di due $\mathbf{F}_1$.

Una $\mathbf{F}_3$ è sempre, o un *tripunto*, o un *trivettore* [cfr. per le $\mathbf{F}_2$ ed $\mathbf{F}_3$ i libri sopra citati].

all'infinito posit $(B - A)$; cioè posit (AB) è una *retta proiettiva con punti propri* (non retta all'infinito);

se u, v sono vettori e $uv \neq 0$, posit (uv) contiene i punti all'infinito che sono posizioni dei vettori paralleli ad un qualsiasi piano parallelo ad u e v; cioè posit (uv) è una *retta all'infinito*;

se A, B, C sono punti non collineari, $ABC \neq 0$, posit (ABC) contiene i punti propri del piano ordinario che passa per A, B, C ed inoltre i punti della retta all'infinito posit $(B - A, C - A)$; cioè posit (ABC) è un *piano proiettivo*;

posit Ω, coincidente con la posizione di un qualsiasi trivettore non nullo, è il luogo di tutti i punti all'infinito e chiamasi *piano proiettivo all'infinito*.

Conviene notare esplicitamente che: *moltiplicando una* F *non nulla per un numero reale non nullo, non si cambia la posizione della* F; ed inoltre: *le* F_1, F_2, F_3 *che hanno, rispettivamente, per posizione un* ***punto***, *una* ***retta***, *un* ***piano proiettivi*** *dati, formano un sistema, lineare ad una dimensione, per il quale si può definire la* ***divisione***, *a resultato unico, come in Algebra.*

Se s è un *bipunto* e τ un *tripunto*, non nulli, allora la *retta* e il *piano*, *proiettivi*, posit s, posit τ hanno, rispettivamente, per *punto e retta all'infinito* posit $(s\Omega)$, posit $(\tau\Omega)$; elementi ***assoluti*** per i quali non è necessario ricorrere ai punti accidentali A, B, C con i quali si possono individuare s e τ.

È così che si può ottenere la *Geometria proiettiva* ordinaria per mezzo delle F e della *posizione* di una F [1].

13. Alcune identità tra F_1 nello spazio e nel piano. — Siano a, b, c, d, e, p, q, r delle F_1 qualunque.

Tra *cinque* F_1 qualunque, a, b, c, d, e, esiste sempre la relazione seguente

$$bcde \cdot a + cdea \cdot b + deab \cdot c + eabc \cdot d + abcd \cdot e = 0, \tag{11}$$

ovvero sotto altra forma

$$acde \cdot b - bcde \cdot a = deab \cdot c + eabc \cdot d + cdab \cdot e. \tag{11'}$$

[1] Cfr. la forma più complicata, e inesatta, adottata da H. Grassmann figlio (*Ausdehnungslehre*..., l. c.) per introdurre la nozione di *posizione* e di *massa* per le *sole* F_1. Le nozioni di *numero reale* e di *punto proprio* (condizione) sono ben note a tutti: niente di più semplice che valersene per stabilire, come G. Peano ha fatto per il primo (*Calcolo geometrico*..., l. c.), la teoria generale delle F e introdurre in seguito (str. libri sopra citati) il concetto di *posizione* che conduce facilmente agli enti proiettivi.

Tra *sei* $\mathbf{F}_1$ qualunque a, b, c, p, q, r, esiste sempre la relazione seguente

$$(12)\qquad apqr\cdot bc + bpqr\cdot ca + cpqr\cdot ab = \{pabc\cdot qr + qabc\cdot rp + rabc\cdot pq\}.$$

Sia α una $\mathbf{F}_3$ non nulla e a, b, c, d delle $\mathbf{F}_1$ non nulle le cui posizioni appartengono a posit α. Si ha l'identità

$$(13)\qquad \frac{bcd}{\alpha}\cdot a - \frac{cda}{\alpha}\cdot b + \frac{dab}{\alpha}\cdot c - \frac{abc}{\alpha}\cdot d = 0$$

ovvero sotto altra forma

$$(14)\qquad \frac{acd}{\alpha}\cdot b - \frac{bcd}{\alpha}\cdot a = -\left(\frac{cab}{\alpha}\cdot d - \frac{dab}{\alpha}\cdot c\right).$$

Faremo presto uso delle identità (11)-(14).

14. **Prodotto alternato regressivo (o intersezioni).** — Siano

A, B, C..... delle $\mathbf{F}_1$ non nulle
a, b, c..... » $\mathbf{F}_2$ » »
α, β, γ..... » $\mathbf{F}_3$ » »

a) Abbiamo già definiti (n. 5) i prodotti alternati

$$(15)\qquad AB,\quad Aa,\quad A\alpha;\qquad aA,\quad ab;\qquad \alpha A;$$

restano da definire i prodotti

$$(16)\qquad a\alpha;\qquad \alpha a,\quad \alpha\beta.$$

La definizione può esser scelta in modo *arbitrario*. Per avere una definizione *utile*, basta osservare che i prodotti (15) dànno, o dei *numeri*, volumi, o degli elementi *proiettanti* e che restano quindi da considerarsi gli elementi *proiezioni*. Noi daremo, dunque, una definizione utile geometricamente, definendo $a\alpha$ e αa in modo che posit $(a\alpha)$ sia il punto comune alla retta posit a e al piano posit α, definendo $\alpha\beta$ in modo che posit $(\alpha\beta)$ sia la retta comune ai piani posit α, posit β.

Se, come è naturale, diamo ad $a\alpha$ ed αa lo stesso significato, allora risulta dalla (11') che, per $a = AB$, conviene porre per definizione

$$(17)\qquad AB\cdot\alpha = A\alpha\cdot B - B\alpha\cdot A,$$

e per $\alpha = PQR$

$$(17')\qquad PQR\cdot a = QRa\cdot P + RPa\cdot Q + PQa\cdot R;$$

ed è evidente che le posizioni dei primi membri delle (17), (17') indi-

cano, ciascuno, un punto collineare con A e B, complanare con P, Q, R; vale a dire posit $(a \cdot \alpha)$ e l'*intersezione* di posit a con posit α.

Per l'intersezione di due piani basta porre, in virtù della relazione (12)

$$ABC \cdot \alpha = A\alpha \cdot BC + B\alpha \cdot CA + C\alpha \cdot AB \tag{18}$$

e risulta subito che $\alpha\beta = -\beta\alpha$.

È chiaro che

$$a\alpha = 0 \text{ esprime che « posit } a \text{ sta in posit } \alpha \text{ »}$$
$$\alpha\beta = 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{« posit } \alpha = \text{posit } \beta \text{ »}$$

ovvero che uno dei fattori è nullo [1].

Non vi è ragione alcuna di cambiare per i prodotti *alternati regressivi* il simbolo $\bigcirc$ già introdotto per quelli progressivi. Con notazione completa scriveremo $a \bigcirc \alpha$, $\alpha \bigcirc a$, $\alpha \bigcirc \beta$ tutte le volte che la notazione abbreviata $a\alpha$, αa, $\alpha\beta$ può condurre ad assurdi.

b) Quando si opera soltanto con punti e rette di un piano proiettivo, allora si ha da considerare la *intersezione* di due rette, cioè il prodotto alternato regressivo, nel piano, di due F_2 non nulle. Se a, b sono F_2 del piano, $a \bigcirc b$ ha già significato e si ha sempre $a \bigcirc b = 0$. Indicheremo con $a \bigcirc' b$ il prodotto alternato regressivo di a per b nel piano considerato, cioè la F_1 tale che posit $(a \bigcirc' b)$ è il *punto* comune a posit a e posit b. In virtù della (14) basta porre per definizione

$$(AB) \bigcirc' a = \frac{Aa}{\alpha} \cdot B - \frac{Ba}{\alpha} \cdot A \tag{19}$$

e si avrà $a \bigcirc' b = -b \bigcirc' a$. Quando non possa esservi luogo ad equivoci possiamo *sottintendere* il simbolo $\bigcirc'$ e scrivere, brevemente, ab in luogo di $a \bigcirc' b$.

c) Quando si opera nel *piano all'infinito*, i *punti* e le *rette* sono

[1] Cfr. *Geometria metrico-proiettiva* e *Geometria Analitico-proiettiva* (l. c.), per i prodotti di tre fattori.

Cfr. pure la forma complicata adottata da H. Rothe nella: *Über die lineare Abhängigkeit der gemischten Produkt von drei Faktoren* (Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, 1910).

Anche nello spazio euclideo ad n dimensioni si ottengono vettori, omografie, formazioni geometriche e loro prodotti alternati progressivi e regressivi, sotto *forma assoluta* (con *zero* coordinate). Cfr. A. Pensa: *Geometria assoluta dei vettori e delle omografie vettoriali in un S_n euclideo* (R. Ist. Lombardo, Rend., Vol. LII, 1919, pp. 439-453); *Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un S_n euclideo* (Atti R. Ist. Veneto, Tomo LXXIX, Parte seconda, 1920; Nota 1ª, pp. 275-292; Nota 2ª, pp. 737-761).

le posizioni dei *vettori* e *birettori* non nulli e come forma unitaria α conviene fissare il trivettore unitario Ω.

Se, ad es., u, v, w sono vettori si ha dalla (19)

$$(uv)\bigcirc' \mid w = \frac{u \mid w}{\Omega} \cdot v - \frac{v \mid w}{\Omega} \cdot u$$

che per la (9) diviene

$$(uv)\bigcirc' \mid w = u \times w \cdot v - v \times w \cdot u,$$

il cui secondo membro coincide con $(u \wedge v) \wedge w$ e quindi si ha, con notazione completa,

$$(u \bigcirc v)\bigcirc' \mid w = (u \wedge v) \wedge w.$$

Questo esempio basta per provare quale grande utilità e importanza pratica ha il simbolo $\wedge$; esso esprime, da se solo, quanto è espresso dal complesso dei tre simboli $\bigcirc$, $\bigcirc'$, $\mid$.

L'operatore indice, $\mid$, di GRASSMANN è non solo utile, anch'esso, ma *necessario*; ma il simbolo $\wedge$ è non meno utile e necessario. Bisogna saper far uso opportunamente, nei vari casi, di questi diversi simboli.

15. **Limite, derivate, integrali.** — Siano a, a_0 delle $\mathbf{F}_r$ (per $r = 1, 2, 3$), la prima funzione di una variabile numerica t, la seconda indipendente da t, cioè costante. Diremo che a_0 è il limite a cui tende a col tendere di t a t_0,

$$\lim_{t=t_0} a = a_0,$$

quando, comunque si fissi una forma p di specie $4 - r$ indipendente da t, costante, si ha sempre

$$\lim_{t=t_0} (ap) = a_0 p.$$

Si possono ripetere per le $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ quanto è stato già fatto ampiamente per le $\mathbf{F}_1$ [cfr. Cap. V] e definire le derivate, integrali, ecc.

16. **Trasformazioni lineari.** — Per completare la parte fondamentale del calcolo geometrico delle $\mathbf{F}$, bisogna considerare ancora le *trasformazioni lineari* delle $\mathbf{F}$ in $\mathbf{F}$. Rimandiamo il lettore ai libri già citati, non essendo possibile dare un cenno rapido di un così vasto argomento.

PARTE SECONDA

Applicazioni del Calcolo vettoriale alla Geometria, alla Meccanica e alla Fisica matematica.

CAPITOLO I.

Applicazioni alla Geometria differenziale.

1. **Retta tangente e piano osculatore. Assintoti, piani assintotici.** — *a*) Il punto $P(t)$ funzione della variabile numerica t, definisce, col variare di t in un dato campo, una linea.

La *tangente* in P alla linea è la posizione limite della retta PP_1, quando P_1, variando sulla linea, tende a P.

Il *piano osculatore* in P è la posizione limite del piano individuato dalla tangente in P e dal punto P_1, quando P_1, variando sulla linea, tende a P.

La ricerca della tangente e del piano osculatore in P è basata sul teorema seguente:

Se m è il minimo dei numeri interi k tali che $P^{(k)} \neq 0$, e n è il minimo dei numeri interi k', maggiori di m, tali che $P^{(m)} \wedge P^{(k')} \neq 0$; allora, la tangente in P è parallela al vettore $P^{(m)}$ e il piano osculatore è normale al vettore $P^{(m)} \wedge P^{(n)}$.

Sia infatti $P_1 = P(t+h)$ e si sviluppi (Par. I, Cap. V, n. 4) colla formula di Taylor arrestandosi alla derivata d'ordine m o n.

$$P_1 - P = hP' + \frac{h^2}{2!} P'' + \dots + \frac{h^m}{m!} (P^{(m)} + \varepsilon),$$

$$P_1 - P = hP' + \dots + \frac{h^m}{m!} P^{(m)} + \dots + \frac{h^n}{n!} (P^{(n)} + \varepsilon_1).$$

E da queste, tenendo conto delle ipotesi fatte, si ha

$$\lim_{h=0} \frac{P_1 - P}{\frac{h^m}{m!}} = P^{(m)}; \quad \lim_{h=0} \frac{P^{(m)} \wedge (P_1 - P)}{\frac{h^n}{n!}} = P^{(m)} \wedge P^{(n)}$$

che dimostrano quanto abbiamo affermato.

Nei casi più comuni $m = 1$, $n = 2$: e quindi la tangente è parallela a P' ed il piano osculatore è normale a $P' \wedge P''$. La direzione della *binormale* è dunque $P' \wedge P''$; quella della *normale principale* è $(P' \wedge P'') \wedge P'$. Le giaciture normali ai tre precedenti vettori, sono quelle dei piani *normale*, *osculatore* e *rettificante*.

Nelle parti *b*, *c*, *d* seguenti diamo un cenno dei *punti all'infinito, assintoti e piani assintotici* di una linea [1].

b) Se col tendere di t a t_0 il numero $(P - O)^2$, essendo O punto arbitrario, tende all'infinito, allora si dice che P tende all'infinito col tendere di t a t_0.

I numeri t_0 per i quali P tende all'infinito si ottengono risolvendo la equazione in t.

$$(1) \qquad 1 : (P - O)^2 = 0, \quad \text{ovvero} \quad (P - O)^2 = \infty.$$

Se esiste un numero reale h funzione di t e tale che

$$(2) \qquad \lim_{t \to t_0} \{h (P - O)\}$$

è un determinato vettore non nullo u, allora P tende all'infinito, per t tendente a t_0, nella direzione di u.

Ad es. per la *catenaria*, o *cosinusoide iperbolica*,

$$P = O + t \cdot a + \cosh t \cdot ia$$

il punto P tende all'infinito per t tendente a $+\infty$ e nella direzione del vettore

$$\lim \{(P - O) : \cosh t\} = \lim \{t : \cosh t \cdot a + ia\} = ia.$$

Invece per la *spirale logaritmica*

$$P = O + at \cdot e^{mt} a$$

il punto P tende all'infinito col tendere di t a $+\infty$ ma il

$$\lim \{(P - O) : t\}$$

è indeterminato e P non tende ad una direzione unica.

[1] C. Burali-Forti, *Sugli assintoti e piani assintotici di una linea*. (Giornale di Matematiche di Battaglini, diretto dal prof. E. Pascal, vol. LIX (1916), 7° della 3ª serie).

c) In tutto ciò che segue resta sottinteso che si considera il limite per t tendente a t_0, essendo t_0 una soluzione della (1).

Se esiste un numero reale k, funzione di t, e tale che

$$\lim (kP') \tag{3}$$

è un determinato vettore non nullo, allora la tangente in P può tendere ad una posizione limite parallela al vettore (3), o anche essere retta all'infinito; altrimenti è indeterminata.

Ad es. per la *sinusoide*

$$P = O + t \cdot a + \operatorname{sen} t \cdot a$$

si ha $t_0 = +\infty$ e

$$\lim |(P - O)/t| = a, \quad \lim P' \text{ indeterminato,}$$

cioè P tende all'infinito nella direzione di a ma la tangente non ha posizione determinata.

Se, per t tendente a t_0, la tangente in P tende ad una posizione determinata questa è un *assintoto* della linea.

Supposto che i vettori (2), (3) siano determinati, non nulli e paralleli, indichiamo con u un vettore unitario parallelo ad essi. L'assintoto sarà all'infinito, o sarà parallelo ad u.

La linea descritta da P sia gobba, cioè non situata in un piano. Sia O un punto fisso, arbitrario, e a un vettore unitario, pure costante, che in tutto il campo di variazione di t non è normale a P' (cioè $P' \times a \neq 0$ e anche $u \times a \neq 0$). Se la tangente nel punto generico P taglia il piano α uscente da O e normale ad a nel punto M si avrà

$$M = P + \lambda P'$$

con λ funzione di t tale che

$$(M - O) \times a = 0, \quad \text{cioè } (P - O) \times a + \lambda P' \times a = 0$$

e quindi, dopo semplici riduzioni,

$$M = O - \frac{|(P - O) \wedge P'| \wedge a}{P' \times a}.$$

Se $\lim M = A$, con A punto proprio, allora l'*assintoto* è la parallela condotta da A ad u; se M tende all'infinito allora l'assintoto è una retta all'infinito.

Se la linea descritta da P giace in un piano allora si opera più semplicemente. Sia O un punto fisso, arbitrario, del piano, e sia

$$\delta = (P - O) \times iu$$

la distanza di P dalla retta uscente da O e parallela ad u.

Se $\lim \delta$ è finito allora l'assintoto passa per il punto

$$O + \lim \delta \cdot iu$$

ed è parallela ad u.

Ad es. per la *spirale iperbolica*

$$P = O + \frac{a^2}{t} e^{it/a}$$

il punto P tende all'infinito col tendere di t a zero e si ha:

$$\lim \{t(P - O)\} = a, \quad \lim \{t^2 P''\} = -a$$

$$\delta = (P - O) \times ia = \frac{a^2}{t} \operatorname{sen} \frac{t}{a}, \quad \lim \delta = a$$

e quindi l'assintoto è parallelo ad a e passa per $O + aia$.

d) Se col tendere di P all'infinito il piano osculatore in P tende ad una posizione limite, questa è un *piano assintotico* della linea.

Se esiste k funzione di t, in modo che

$$\lim (k \cdot P' \setminus P'') \tag{4}$$

è vettore determinato e non nullo, parallelo ad un vettore unitario u, allora il piano assintotico, se esiste, è normale ad u.

Si procede come in *c*) considerando la distanza

$$\delta = (P - O) \times u$$

di P dal piano uscente da O e normale ad u. Se $\lim \delta$ è finito il piano assintotico passa per $O + \lim \delta \cdot u$ ed è normale ad u.

2. **Arco, flessione, torsione, formule di Frenet.** — Supponiamo che in tutto il campo di variazione di t sia

$$P' \setminus P'' \neq 0.$$

a) Se s è l'arco in P, contato da un punto O della curva, si ha

$$\frac{ds}{dt} = \text{mod}\,\frac{dP}{dt},$$

cioè

$$ds = \text{mod}\, dP,$$

supposto che s cresca con t.

Ciò si dimostra facilmente ammesso noto, sotto opportune condizioni, che: *il limite del rapporto tra l'arco e la corda, tendendo l'arco a zero, è l'unità.* Invero per $P_1 = P(t+h)$ e h positivo si ha identicamente

$$\frac{\text{arco}\,(PP_1)}{h} = \frac{\text{arco}\,(PP_1)}{\text{corda}\,(PP_1)}\,\text{mod}\,\frac{P_1 - P}{h}$$

perchè corda $(PP_1) = \text{mod}\,(P_1 - P)$. Passando al limite si ha la formula che dà la derivata di s; ecc.

Definiamo nel modo seguente i vettori unitari $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ paralleli alla *tangente*, *normale principale* e *binormale* in P:

$$(1) \qquad \boldsymbol{t} = \frac{dP}{ds}; \quad \boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\Big/\text{mod}\,\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}; \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}.$$

Questi vettori formano un sistema ortogonale destrogiro e valgono le formule solite [Par. I, Cap. II, n. 3, (6)].

Definiamo ancora i numeri $1/\rho$, $1/\tau$, *flessione* e *torsione* nel punto P, ponendo

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \times \boldsymbol{n}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \boldsymbol{n}.$$

Ciò posto si ha:

$$(3) \qquad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}; \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t} - \frac{1}{\tau}\boldsymbol{b}; \quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\boldsymbol{n},$$

che sono le formule di FRENET, date sotto forma vettoriale.

La prima di queste si deduce subito dalla seconda delle (1), e dalla prima delle (2). Si ha poi

$$\boldsymbol{b}^2 = 1, \quad \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{b} = 0;$$

derivando

$$\boldsymbol{b} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = 0; \quad \boldsymbol{t} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = 0;$$

le quali provano che $\frac{db}{ds}$ è normale a t e b, cioè è un multiplo di n: e per la seconda delle (2) resta dimostrata la terza delle (3).

Quanto alla seconda si ha

$$\frac{dn}{ds} = \frac{d}{ds}(b \wedge t) = \frac{1}{\rho} b \wedge n + \frac{1}{\tau} n \wedge t = -\frac{1}{\rho} t - \frac{1}{\tau} b.$$

Col metodo esposto, in ogni punto della curva si hanno da considerare i tre numeri s, ρ, τ; i tre vettori t, n, b e le tre relazioni principali (3): cioè in tutto *sei* elementi e *tre* relazioni.

Col metodo cartesiano occorrono le *tre* coordinate del punto, i numeri s, ρ, τ; i *nove* coseni direttori e *nove* relazioni: in tutto *quindici* elementi e *nove* relazioni.

a) Alle formule vettoriali di FRENET, (3), si può dare un'altra forma notevole, introducendo il vettore

$$\Omega = \frac{1}{\rho} b - \frac{1}{\tau} t$$

(che è parallelo alla generatrice della *sviluppabile rettificante* della linea P); si ha

$$(3') \qquad \frac{dt}{ds} = \Omega \wedge t, \quad \frac{dn}{ds} = \Omega \wedge n, \quad \frac{db}{ds} = \Omega \wedge b.$$

Ne segue subito

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right) b - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right) t$$

e se u è vettore invariabilmente collegato con t, n, b cioè si ha che $u \times t$, $u \times n$, $u \times b$ sono *costanti*, allora

$$\frac{du}{ds} = \Omega \wedge u \text{ [1]}$$

che dà, come casi particolari, le (3').

b) Se P è dato in funzione di una variabile numerica t qualunque, e si indicano con gli apici le derivate di P rispetto

(1) Per le applicazioni cfr. Bibliografia, varie note di C. BURALI-FORTI e M. BOTTASSO.

a t e inoltre poniamo

$$(4) \qquad v = \operatorname{mod} P', \quad \text{ossia,} \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

si ottiene, successivamente:

$$(5) \qquad \begin{cases} P' = vt \\ P'' = v't + \dfrac{v^2}{\rho} n \\ P''' = v''t + \dfrac{vv'}{\rho} n + \left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)' n + \dfrac{v^3}{\rho}\left(-\dfrac{1}{\rho} t - \dfrac{1}{\tau} b\right): \end{cases}$$

e da queste facilmente

$$P' \wedge P'' = \frac{v^3}{\rho} b; \quad P' \wedge P'' \times P''' = -\left(\frac{v^3}{\rho}\right)^2 \frac{1}{\tau}; \quad (P' \wedge P'') \wedge P' = \frac{v^4}{\rho} n.$$

Deduciamo inoltre che

$$(6) \qquad t = \frac{P'}{\operatorname{mod} P'}; \quad n = \frac{(P' \wedge P'') \wedge P'}{\operatorname{mod}(P' \wedge P'') \cdot \operatorname{mod} P'}; \quad b = \frac{P' \wedge P''}{\operatorname{mod}(P' \wedge P'')},$$

e poi

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{mod}(P' \wedge P'')}{(\operatorname{mod} P')^3}; \quad \frac{1}{\tau} = -\frac{P' \wedge P'' \times P'''}{(P' \wedge P'')^2}.$$

c) Mediante i vettori P', P'', P''' si può facilmente co-

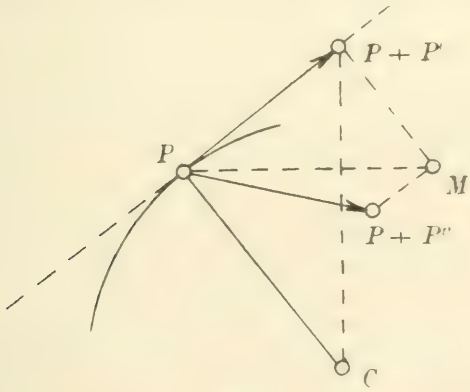

Fig. 21

struire il punto

$$C = P + \rho n,$$

centro di curvatura, e la lunghezza τ.

Dai punti $P + P'$, $P + P''$ si conducano le parallele a n e t e s'incontrino in M. La perpendicolare condotta da $P + P'$ alla retta PM taglia la normale principale nel punto C (cfr. Fig. 21).

Basta perciò dimostrare che i vettori $C - (P + P')$ e $M - P$ sono ortogonali. Ora si ha

$$M = P + P' + \frac{r^2}{\rho} n$$

essendo evidentemente $\frac{r^2}{\rho} n$ il vettore $M - (P + P')$. Quindi

$$\{C - (P + P')\} \times \{M - P\} = (\rho n - rt) \times \left(rt + \frac{r^2}{\rho} n\right)$$
$$= r^2 - r^2 = 0.$$

Per costruire τ si osservi che se δ è la distanza del punto $P + P'''$ dal piano osculatore, si ha (Par. I, Cap. II, n. 6)

$$\delta = \pm \frac{P' \wedge P'' \times P'''}{\operatorname{mod}(P' \wedge P'')},$$

e quindi per la (7)

$$\tau\delta = \pm \operatorname{mod}(P' \wedge P'');$$

cioè τ è l'altezza del parallelogrammo di base δ equivalente al parallelogrammo formato coi vettori P e P''.

d) Se u è un vettore funzione di t, il punto P, definito, a meno di una traslazione, dall'equazione differenziale

$$P' = u' \wedge u, \tag{8}$$

descrive una linea la cui binormale in P è parallela ad u e il cui raggio di torsione è $\tau = u^2$.

Infatti da (8) risulta

$$P'' = u'' \wedge u;$$

quindi u è normale a P' e P'' cioè parallelo alla binormale. Inoltre

$$P''' = u''' \wedge u + u'' \wedge u',$$

e però la seconda delle (7) ci dà

$$\tau = -\frac{\{(u' \wedge u) \wedge (u'' \wedge u)\}^2}{(u' \wedge u) \wedge (u'' \wedge u) \times (u''' \wedge u + u'' \wedge u')}$$
$$= -\frac{(u' \times u'' \wedge u)^2 u^2}{(u' \times u'' \wedge u)(u \times u'' \wedge u')} = u^2.$$

Si consideri un'altra curva P_1 definita da

$$P_1' = u_1' \wedge u_1 \tag{8'}$$

essendo u_1 un vettore funzione di t. La retta PP_1 descrive col variare di t una rigata, della quale le linee P, P_1 sono due assintotiche curvilinee solamente quando u_1 soddisfa la equazione differenziale

$$u_1' + u' = \omega_1 (u_1 - u) \tag{9}$$

con ω_1 funzione arbitraria di t.

Perchè, infatti, le linee P, P_1 siano assintotiche della rigata PP_1, è necessario e basta che $P - P_1$ sia normale ad u ed u_1; cioè

$$P_1 - P = h u_1 \wedge u. \tag{10}$$

Derivando

$$u_1' \wedge u_1 - u' \wedge u = h' u_1 \wedge u + h u_1' \wedge u + h u_1 \wedge u'; \tag{11}$$

e moltiplicando scalarmente per u o per u_1 si ha

$$u_1' \wedge u_1 \times u = h u_1 \wedge u' \times u$$
$$-u' \wedge u \times u_1 = h u_1' \wedge u \times u_1.$$

Moltiplicando membro a membro risulta $h^2 = 1$; e si può fare, senza ledere la generalità, $h = 1$; con ciò la (11) diventa

$$(u_1' + u') \wedge (u_1 - u) = 0$$

che equivale alla (9); e la (10) ci dà

$$P_1 = P + u_1 \wedge u$$

come integrale della (8').

Posto

$$\omega_1 = \frac{\psi_1'}{\psi_1},$$

la (9), equazione differenziale del primo ordine e lineare, ci dà subito

$$u_1 = \psi_1 \left(c - \int \frac{d(\psi_1 u)}{\psi_1^2} \right)$$

ove c è un vettore costante arbitrario.

Se δ è la distanza dei punti P, P_1; τ, τ_1 i raggi di torsione in essi; γ l'angolo dei piani osculatori in P e P_1, si ha

$$\delta^2 = (P_1 - P)^2 = u_1^2 u^2 \operatorname{sen}^2 (u_1, u) = \tau\tau_1 \operatorname{sen}^2 \gamma \text{ [1]}.$$

e) Se O è un punto e k è un vettore unitario, costante, allora: affinchè la normale principale in ogni punto della linea descritta dal punto P incontri la retta Ok (retta uscente da O e parallela a k), è necessario e sufficiente che, essendo r la distanza di P dalla retta Ok, si abbia

$$(\alpha) \qquad r \cdot \cos \{(P - O) \wedge k, t\} = \text{cost.}$$

Infatti. Affinchè la normale principale, Pn, in P, incontri la retta Ok, è necessario e sufficiente che

$$(a) \qquad (P - O) \wedge k \times n = 0,$$

condizione che equivale a

$$(b) \qquad (P - O) \wedge k \times t = \text{cost.},$$

poichè la derivata della (b) rispetto ad s dà la (a). Ma si ha ovviamente

$$\operatorname{mod} \{(P - O) \wedge k\} = \operatorname{mod} (P - O) \cdot \operatorname{sen} (P - O, k) = r$$

e quindi, per la definizione di $\times$, la (b) equivale alla formula (α), c. d. d.

Si noti che se il punto P descrive una linea situata in una *superficie di rotazione di asse Ok*, e la tangente in P alla linea forma l'angolo di θ radianti con la tangente in P alla *meridiana* della superficie che passa per P, allora $(P - O) \wedge k$ ha la direzione della tangente in P al *parallelo* della superficie che passa per P e quindi $\cos \{(P - O) \wedge k, t\} = \pm \operatorname{sen} \theta$, vale a dire la (α) diviene

$$r \operatorname{sen} \theta = \text{cost.}$$

che esprime un noto teorema di CLAIRAUT.

[1] Abbiamo così ridotto a forma *assoluta* il § 1 della memoria di L. BIANCHI, *Sulle configurazioni mobili....* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, T. XXV, pag. 291, 1908). Cfr. anche: M. BOTTASSO, *Sulle trasformazioni assintotiche delle curve.* (Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXVI, s. 5ª, 1917).

3. **Sfera osculatrice, cerchio osculatore.** — Sulla curva descritta da $P(t)$ si considerino i punti P_1, P_2, P_3, P_4 dati dai valori t_1, t_2, t_3, t_4 di t. La posizione limite della sfera che passa per questi quattro punti quando essi tendono a $P(t)$, è la sfera osculatrice in P. Sia C il centro e r il raggio della sfera che passa per P_1, P_2, P_3, P_4 e si consideri la funzione

$$f(t) = (P - C)^2 - r^2;$$

essa si annulla per $t = t_1$, t_2, t_3, t_4. Quindi $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t)$ si annullano rispettivamente per *tre, due, un* valore di t compresi fra t_1, t_2, t_3, t_4. Passando al limite, il centro C e il raggio r della sfera osculatrice soddisfano alle condizioni

$$f(t) = 0, \quad f'(t) = 0, \quad f''(t) = 0, \quad f'''(t) = 0,$$

essendo C ed r costanti rispetto a t.

Per il calcolo effettivo supponiamo P funzione di s.

Derivando (formule di FRENET) la condizione

$$(P - C)^2 = r^2,$$

si ha successivamente

$$(P - C) \times \boldsymbol{t} = 0; \quad (P - C) \times \boldsymbol{n} = -\rho; \quad (P - C) \times \boldsymbol{b} = \tau \frac{d\rho}{ds};$$

e da queste risulta

$$C = P + \rho \boldsymbol{n} - \tau \frac{d\rho}{ds} \boldsymbol{b};$$

e quindi

$$r^2 = \rho^2 + \tau^2 \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2.$$

Dunque il centro della sfera osculatrice è situato sulla parallela alla binormale condotta dal centro di curvatura $P + \rho \boldsymbol{n}$ e alla distanza da questo punto, nel verso di $-\boldsymbol{b}$, di $\tau(d\rho/ds)$.

Risulta ancora che definito il cerchio osculatore in P, come posizione limite del cerchio che passa per P_1, P_2, P_3, esso è la sezione del piano osculatore con la sfera osculatrice e, quindi, ha $P + \rho \boldsymbol{n}$ per centro e ρ per raggio [1].

[1] Cfr., per altro modo di ottenere la sfera osculatrice e per notevoli applicazioni geometriche, il recente libro di T. BOGGIO, *Calcolo differenziale con applicazioni geometriche* (Collezione Lattes, 1921).

4. **Evolventi ed evolute.** — *a*) Le evolventi della linea P sono le traiettorie ortogonali delle sue tangenti. Il punto

$$Q = P + xt$$

descrive una evolvente di P, quando x è funzione tale di s che

$$\frac{dQ}{ds} \times t = \left(t + \frac{dx}{ds} t + \frac{x}{\rho}\right) \times t = 1 + \frac{dx}{ds} = 0;$$

onde

$$x = -s + \text{cost.};$$

dunque tutte le evolventi della linea P sono descritte dal punto

$$Q = P - (s + c)t.$$

b) Le *evolute* della linea P sono le linee che hanno la linea P come una delle loro evolventi.

Se Q descrive una evoluta di P, la retta QP deve giacere nel piano normale in P ed essere tangente alla linea Q. Se quindi poniamo

$$u = \cos\varphi\, n + \operatorname{sen}\varphi\, b; \quad Q = P + xu;$$

i numeri φ, x devono essere funzioni di s tali che

$$\frac{dQ}{ds} \wedge u = \left(t + \frac{dx}{ds} u + x \frac{du}{ds}\right) \wedge u = \left(t + x \frac{du}{ds}\right) \wedge u = 0.$$

Dalle formule di FRENET (n. 2, (3)) risulta

$$t + x\frac{du}{ds} = \left(1 - x\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) t + x\left(\frac{1}{\tau} - \frac{d\varphi}{ds}\right)(\operatorname{sen}\varphi\, n - \cos\varphi\, b),$$

e quindi l'equazione precedente ci dà

$$x\left(\frac{1}{\tau} - \frac{d\varphi}{ds}\right) t + \left(1 - x\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)(\cos\varphi\, b - \operatorname{sen}\varphi\, n) = 0.$$

Ma dovranno essere nulli separatamente i coefficienti di t, n, b e quindi

$$x = \frac{\rho}{\cos\varphi}; \quad \varphi = \int \frac{ds}{\tau} + \varphi_0;$$

e infine

$$Q = P + \rho n + \rho \operatorname{tang}\varphi\, b.$$

5. **Linee piane.** — Se la linea P è piana, i vettori P', P'',.... sono tutti complanari; la torsione $1/\tau$ è nulla per tutti i punti della linea ed il vettore b è costante.

Fissata la rotazione i nel piano della curva, il vettore n vale it. Si può allora dare alla flessione $1/\rho$ un segno in modo che la prima formula di FRENET assuma la forma

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\rho} it. \tag{1}$$

Dato ρ in funzione di s, l'integrale generale di questa equazione è

$$t = e^{i\int \frac{ds}{\rho}} t_0, \tag{2}$$

in cui t_0 è un vettore unitario costante; poscia

$$P = P_0 + \int t ds, \tag{3}$$

ci darà la linea della quale in ogni punto P è dato l'arco s e la flessione $1/\rho$.

Se t fa con un vettore fisso, unitario, a del piano, l'angolo φ, e precisamente

$$t = e^{i\varphi} a, \tag{4'}$$

allora derivando rispetto ad s si ha subito

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad \text{cioè} \quad ds = \rho d\varphi \tag{4}$$

che dà un modo, talvolta assai opportuno, per calcolare la curvatura $1/\rho$.

a) Avendo v lo stesso significato già stabilito per le linee qualunque (n. 2), si ha

$$P' = vt, \quad P'' = v't + \frac{v^2}{\rho} it; \tag{5}$$

e da queste risulta

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{P' \times iP''}{(\text{mod } P')^3}, \tag{6}$$

avendo ρ un segno determinato.

Pel centro di curvatura C avremo

$$C = P + \rho \boldsymbol{t}, \tag{7}$$

cioè

$$C = P - \frac{P'^2}{P' \times iP''} iP', \tag{7'}$$

che esprime C in funzione di P, P', P'', qualunque sia la variabile indipendente della quale P è funzione.

Se, ad es., $\rho =$ cost. allora derivando la (7) rispetto ad s e tenendo conto della (1) si ha $dC/ds = 0$, cioè $C =$ cost. e dalla (7') $(C - P)^2 =$ cost. $= \rho^2$, il che prova che: *le linee piane a curvatura costante sono soltanto le circonferenze: il centro di una circonferenza è il suo centro di curvatura, il raggio ne è il raggio di curvatura.*

b) Le evolute della linea piana P sono descritte dal punto

$$Q = P + \rho i\boldsymbol{t} + \rho \operatorname{tang} \varphi \boldsymbol{b},$$

con φ costante, perchè (n. 4) $d\tau = 0$ in ogni punto P.

Per $\varphi = 0$ si ha l'*evoluta piana*, che è il luogo dei centri di curvatura. E poichè si deduce subito che

$$\operatorname{mod} dQ = d\rho,$$

si ha che l'arco di evoluta è la differenza dei raggi di flessione della linea P nei due punti P_0, P_1 corrispondenti agli estremi dell'arco di evoluta, supposto che da P_0 a P_1, ρ sia sempre crescente o sempre decrescente.

Per $\varphi \neq 0$, la tangente in Q è parallela al vettore

$$\boldsymbol{u} = \cos \varphi \, i\boldsymbol{t} + \operatorname{sen} \varphi \, \boldsymbol{b};$$

ma

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b} = \operatorname{sen} \varphi = \text{cost.},$$

dunque Q descrive un'elica del cilindro (cfr. n. 6) la cui sezione retta è l'evoluta piana.

c) È notevole il procedimento generale seguente per lo studio di linee piane soddisfacenti a date condizioni.

Siano O un punto e $\boldsymbol{a}$ un vettore unitario, costanti, del piano e η un numero reale pure costante. Se u, v sono numeri funzioni di φ, variabile numerica indipendente, il punto

$$P = O + u\boldsymbol{a} + v e^{\eta} \boldsymbol{a} \tag{1}$$

descrive una linea del piano, e la tangente in P ad essa è parallela al vettore

$$(1) \qquad dP = du \cdot a + dr \cdot e^{i\varphi} a + r d\varphi \cdot e^{i\varphi} ia.$$

Supponiamo che la tangente in P formi con la direzione $e^{i\varphi}a$ l'angolo costante di θ radianti e precisamente

$$(2) \qquad t = e^{i(\varphi+\theta)} a \quad \text{da cui} \quad ds = \rho d\varphi.$$

Per la condizione ora posta si ha

$$dP \times e^{i(\varphi+\theta)} ia = 0 \quad \text{e} \quad ds = dP \times e^{i(\varphi+\theta)} a$$

che per la (1) dànno subito

$$-\operatorname{sen}(\varphi+\theta) \cdot du - \operatorname{sen}\theta \cdot dr + r\cos\theta \cdot d\varphi = 0,$$
$$ds = \cos(\varphi+\theta) \cdot du + \cos\theta \cdot dr + r \operatorname{sen}\theta \cdot d\varphi,$$

ovvero sotto altra forma

$$(3) \qquad \frac{du}{d\varphi} = \frac{r\cos\theta}{\operatorname{sen}(\varphi+\theta)} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\varphi+\theta)} \frac{dr}{d\varphi},$$

$$(4) \qquad \frac{ds}{d\varphi} = \frac{r\cos\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi+\theta)} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi+\theta)} \frac{dr}{d\varphi},$$

e in conseguenza, per la seconda delle (2),

$$(5) \qquad \rho = \frac{r\cos\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi+\theta)} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi+\theta)} \frac{dr}{d\varphi},$$

notando che: la (3) equivale alla prima delle (2) ed è la condizione *necessaria e sufficiente* affinchè la tangente in P formi l'angolo θ con la direzione $e^{i\varphi}a$; la (4) è conseguenza della prima della (2) e della (3); la (5) equivale a $ds = \rho d\varphi$.

Se è noto r in funzione di φ, le (3), (4), (5) dànno u, s, ρ pure in funzione di φ e la linea descritta da P è determinata insieme ai suoi elementi, importanti, s, ρ.

Per $\theta = \pi/2$ la *normale* nel punto P è la congiungente P col punto $O + ua$ e le formule precedenti permettono di determinare facilmente delle linee piane per le quali i raggi di curvatura ρ hanno date relazioni con r (*normale cartesiana*, rispetto al sistema O, a, ia) oppure con $r \operatorname{tg}\varphi$ (*tangente carte-*

siana) [1]. Per $\theta = 0$ la *tangente* nel punto P e la congiungente P col punto $O + ua$.

Si supponga, ad es., $r =$ cost. Se $\theta = \pi/2$ allora dalle formule (3), (4), (5) si ha subito, $u =$ cost., $s = s_0 + r\varphi$, $\rho = r$ e si ha la *circonferenza* di centro $O + ua$ e raggio r. Se $\theta = 0$, allora

$$u = u_0 + r \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad s = s_0 - r \log \cos \varphi, \quad \rho = r \operatorname{ctg} \varphi$$

e si ha la *trattrice* della quale la retta Oa è l'assintoto. I due casi si ottengono facilmente supponendo θ, costante, qualunque.

Si ottengono notevoli esempi, sia per $\theta = 0$ che per $\theta = \pi/2$, supponendo $r = nu$, con n numero reale costante, ovvero $\rho = nr$, ecc., e come il lettore può fare per esercizio. Ci limitiamo a considerare il caso particolare: $\theta = \pi/2$, $\rho = nr$. Dalla (5) si ha

$$(n-1)r \cdot d\varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot dr, \quad \text{e integrando} \quad r = r_0 \operatorname{sen} \varphi^{(n-1)/2};$$

da questa e dalla (3) si ha subito

$$u = u_0 + (n-1) r_0 \int (\operatorname{sen} \varphi)^{(n-2)/2} d\varphi;$$

dalla (4), o meglio da $ds = \rho d\varphi$, si ha pure subito

$$s = s_0 + n r_0 \int (\operatorname{sen} \varphi)^{(n-1)/2} d\varphi.$$

d) Molte questioni relative alle linee piane si possono trattare senza ricorrere agli elementi s, ρ, t, it. Ne diamo un esempio.

Un angolo, non nullo e non piatto, di ampiezza costante, si muove in un piano mantenendo i suoi lati tangenti rispettivamente a due linee α, β del piano; e siano A, B i punti, variabili col moto, di contatto. Il vertice P dell'angolo descrive una linea la cui tangente in P, generico, può costruirsi nei due modi seguenti: la tangente in P ha la direzione della antiparallela della retta AB rispetto ai lati PA, PB dell'angolo; la normale in P passa per il punto C comune alla normale in A e B alle due linee α, β.

[1] Per notevoli applicazioni, che è troppo lungo riportare qui, cfr. C. Burali-Forti, *Geometria metrico proiettiva*, pp. 304-308 (Bocca, Torino, 1904).

Si possono supporre P, A, B funzioni di una stessa variabile numerica t. Conserviamo le notazioni dell'esempio 2°, Parte I, Cap. II, n. 2, b'). La condizione che individua P è

$$u \times v = \text{cost.}$$

che derivata dà

$$(a) \qquad u \times v' + v \times u' = 0.$$

Osservando ora che [Parte I. Cap. V, n. 2, (5)]

$$u' = \left(\frac{A-P}{a}\right)' = \frac{(A-P)\wedge(A'-P')\wedge(A-P)}{a^3} = -\frac{u\wedge(P'\wedge u)}{a},$$

(ed analogamente per v') perchè A' è parallelo ad $A-P$, allora la condizione (a), moltiplicata per ab, dà subito

$$a \cdot u \times v \wedge (P' \wedge v) + b \cdot v \times u \wedge (P' \wedge u) = 0,$$

ovvero

$$a \cdot (u \wedge v) \times (P' \wedge v) - b \cdot (u \wedge v) \times (P' \wedge u) = 0,$$
$$(u \wedge v) \times \{P' \wedge (bu - av)\} = 0.$$

Ma i due fattori di questo prodotto interno sono entrambi normali al piano e $u \wedge v \neq 0$, quindi deve essere

$$P' \wedge (bu - av) = 0$$

che dimostra il teorema [cfr. esempio 2° luogo sopra citato].

In particolare se l'angolo costante è retto, allora la normale in P passa per il punto $(A+B)/2$ medio tra A e B. Se una delle linee α, β si riduce ad un punto, allora si hanno casi particolari interessanti, tra i quali, per l'angolo retto, la *podaria* di una linea rispetto ad un punto; ecc.

6. Eliche cilindriche. — Della linea descritta dal punto P, funzione di una variabile numerica, se ne considerino i soliti elementi t, n, b, s, ρ, τ che compariscono nelle formule di FRENET, e si suppongano ρ, τ sempre finiti e non nulli per qualunque valore di s.

Se k è un vettore unitario fisso, costante, la retta Pk (cioè la parallela condotta da P a k) descrive, col variare di P una *superficie cilindrica*. La linea P è una *elica cilindrica*, nel cilindro considerato, una « elica k » come diremo brevemente.

quando essa taglia sotto angolo costante di θ radianti (escludendo $\theta = 0$, *generatrici*, comprendendo $\theta = \pi/2$, *sezioni rette*, della superficie cilindrica) le generatrici della superficie cilindrica.

a) Le condizioni seguenti sono *caratteristiche* per le « eliche k », cioè: se P descrive una « elica k » esse sono verificate e se una qualunque di esse è verificata allora P descrive una « elica k ».

(1) $t \times k = \cos\theta = \text{cost.}$, e traiettoria sotto l'angolo costante θ delle generatrici;

(2) $n \times k = 0$, la normale principale coincide con la normale alla superficie cilindrica, cioè la « elica k » è una *geodetica* della superficie cilindrica: ovvero, il che equivale, il *piano rettificante* coincide col piano tangente alla superficie cilindrica;

(3) $b \times k = \operatorname{sen}\theta = \text{cost.}$, la binormale fa angolo costante con le generatrici della superficie cilindrica;

(4) $k = \cos\theta \cdot t + \operatorname{sen}\theta \cdot b$;

(5) $\rho/\tau = -\operatorname{ctg}\theta = \text{cost.}$, il rapporto dei raggi di curvatura è costante;

(6) Le *evolventi*, $Q = P - \rho s + c\,t$, con c costante arbitraria, sono *linee piane*, in piani normali a k, indipendenti da θ: cioè tutte le « eliche k » hanno a comune le evolventi che sono linee piane situate in piani normali alle generatrici della superficie cilindrica.

La (1) si è assunta come definizione dell'elica ed è quindi condizione caratteristica.

Indicando con gli apici le derivate rispetto ad s, la (1) equivale a ciascuna delle condizioni

$$t \times k' = 0, \quad (1/\rho) \cdot n \times k = 0, \quad n \times k = 0$$

il che dimostra la (2).

La (2) equivale a ciascuna delle seguenti

$$(1/\tau) \cdot n \times k = 0, \quad b' \times k = 0, \quad b \times k' = 0, \quad b \times k = \text{cost.},$$

e per le (1), (2) resta dimostrata la (3) e la (4).

La (5) equivale a ciascuna delle condizioni

$$(1/\rho)\cos\theta + (1/\tau)\operatorname{sen}\theta = 0, \quad \cos\theta \cdot (1/\rho)\, n + \operatorname{sen}\theta \cdot (1/\tau)\, n = 0,$$
$$\cos\theta \cdot t' + \operatorname{sen}\theta \cdot b' = 0, \quad (\cos\theta \cdot t + \operatorname{sen}\theta \cdot b)' = 0$$
$$\cos\theta \cdot t + \operatorname{sen}\theta \cdot b = \text{cost.}$$

e quindi il vettore unitario $\cos\theta \cdot \boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\theta \cdot \boldsymbol{b}$ è costante, cioè P descrive una elica relativa a tale direzione ed è traiettoria sotto l'angolo di θ radianti, il che dimostra la (5).

Il punto generico $Q = P - s\boldsymbol{t}$ (la costante c essendo inclusa in s) descrive una linea piana solamente quando esiste un vettore costante, unitario, $\boldsymbol{k}$ tale che $Q' = -s\,(\rho \cdot \boldsymbol{n})$ è normale a $\boldsymbol{k}$, cioè solo quando $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k} = 0$; il che, per la (2) e per essere Q indipendente da θ, dimostra la (6).

b) La linea P sia una « elica $\boldsymbol{k}$ » e il punto P_1 descriva una *sezione retta* della superficie cilindrica. Si indichino con $\boldsymbol{t}_1$, s_1, ρ_1 i soliti elementi della linea P_1 e si prenda come origine comune degli archi s, s_1 il punto nel quale l'elica P per $\theta = \pi/2$ taglia la sezione retta P_1, cioè si abbia $s_1 = 0$ per $s = 0$ e viceversa; inoltre sia O un punto fisso, arbitrario, del piano della sezione retta. Si hanno le notevoli proprietà seguenti:

$$P_1 = P - (P - O) \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} \tag{7}$$

$$s_1 = s \cdot \operatorname{sen}\theta, \quad \boldsymbol{t}_1 = (\boldsymbol{t} - \cos\theta \cdot \boldsymbol{k}) \operatorname{sen}\theta, \quad i\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{n} \tag{8}$$

$$P = P_1 + s_1 \operatorname{ctg}\theta \cdot \boldsymbol{k} \tag{9}$$

$$\rho = -\frac{\rho_1}{\operatorname{sen}^2\theta}, \quad \tau = \frac{\rho_1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}. \tag{10}$$

Deve essere $P_1 = P + x\boldsymbol{k}$ con la condizione $(P_1 - O) \times \boldsymbol{k} = 0$, cioè $(P - O) \times \boldsymbol{k} + x = 0$, il che dimostra la (7).

Derivando la (7) rispetto ad s si ha

$$P_1' = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{t} - \cos\theta \cdot \boldsymbol{k}$$

e poichè

$$P_1'^2 = 1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta \cdot \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{k} = 1 + \cos^2\theta - 2\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$$

si ha subito

$$ds_1 / ds = \operatorname{mod}(dP_1 / ds) = \operatorname{sen}\theta$$

che, per le ipotesi fatte, dimostra la prima delle (8). La precedente espressione di P_1' da, allora, subito la seconda delle (8). Ricordando che $i\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{k}$ si ha, tenendo conto della (4)

$$i\boldsymbol{t}_1 = (\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{k}) \operatorname{sen}\theta = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{n}$$

che dimostra l'ultima delle (8).

Siccome $(P - O) \times k) = t \times k = \cos\theta$ risulta che

$$\frac{d(P - O) \times k)}{ds_1} = (P - O) \times k) \frac{ds}{ds_1} = \operatorname{ctg}\theta$$

e quindi integrando, $(P - O) \times k = s_1 \operatorname{ctg}\theta$ che dimostra la (9).

Derivando rispetto ad s_1 la seconda delle (8) e tenendo conto della terza si ha

$$\frac{1}{\rho_1} it_1 = -\frac{1}{\rho_1} n = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{1}{\rho} n \cdot \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\rho \operatorname{sen}^2\theta} n$$

che dimostra la prima delle (10). Da questa e dalla (5) si deduce subito la seconda delle (10) [1].

7. **Punto funzione di due variabili.** — Sia $P(u, v)$ un punto funzione delle due variabili u, v. Col variare di u, v in un certo campo, il punto P descrive, in generale, una superficie che contiene il doppio sistema di linee ottenute facendo variare solamente u (linee $v = \text{cost.}$) o solamente v (linee $u = \text{cost.}$).

Per un punto P della superficie passa una linea v ed una linea u e le tangenti a queste due linee sono parallele ai vettori

$$\frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v}, \text{ o con altra notazione, } P'_u, P'_v \text{ [2]}$$

purchè questi non siano nulli.

Una linea qualunque della superficie si individua con una relazione

$$f(u, v) = 0$$

tra le variabili u, v. La tangente nel punto P di tale linea

[1] Per altre proprietà e per l'*elica circolare*, cfr. C. Burali-Forti, *Geometria Analitico-proiettiva*, l. c.

[2] In generale se h è un ente (numero, punto, vettore) funzione di P, e quindi funzione di u e v si pone

$$h'_u = \frac{\partial h}{\partial u}, \quad h'_v = \frac{\partial h}{\partial v},$$

$$h''_{u^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}, \quad h''_{uv} = h''_{vu} = \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}, \quad h''_{v^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}.$$

è parallela al vettore

$$dP = \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv = P'_u \, du + P'_v \, dv$$

ove du e dv hanno un rapporto che si trae dalla condizione

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0, \quad \text{o anche,} \quad f'_u \, du + f'_v \, dv = 0$$

che è l'*equazione differenziale* della linea considerata.

Se

$$\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \neq 0, \quad \text{cioè,} \quad P'_u \wedge P'_v \neq 0$$

il vettore dP varia nel *piano tangente* in P alla superficie, e la normale in P è parallela al vettore

$$(1) \qquad k = \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} = P'_u \wedge P'_v \, .$$

In molti casi è opportuno considerare il vettore unitario N, parallelo alla normale alla superficie in P, che è parallelo a k ed ha lo stesso verso di k, cioè il vettore

$$(2) \qquad N = k / \operatorname{mod} k = P'_u \wedge P'_v / \operatorname{mod} (P'_u \wedge P'_v),$$

e per il quale si ha, ovviamente,

$$(2') \qquad \operatorname{mod} (P'_u \wedge P'_v) = P'_u \wedge P'_v \times N.$$

a) Qualunque siano gli spostamenti dP, δP di P, essi sono vettori normali ad N, così si ha

$$(3) \qquad dP \times N = 0, \quad \delta P \times N = 0$$

e, in particolare, essendo P funzione di u e v,

$$(3') \qquad P'_u \times N = 0, \quad P'_v \times N = 0.$$

Poichè N è unitario, dN o è nullo, o è normale ad N, cioè

$$(4) \qquad dN \times N = 0, \quad \delta N \times N = 0$$

e in particolare

$$(4') \qquad N'_u \times N = 0, \quad N'_v \times N = 0.$$

Se si applica δ alla prima delle (3), d alla seconda e si osserva che $d\delta P = \delta dP$ si ha subito la importante formula

$$(5) \qquad dP \times \delta N = \delta P \times dN$$

ovvero, in particolare,

$$(5') \qquad P' \times N = P' \times N \ .$$

Giova notare che le (3), (3'), (5), (5') valgono ancora se al posto di N si pone k; non però le (4), (4') perchè k non essendo, in generale, unitario il vettore dk non è normale a k.

Si deve pure notare che i vettori dP, δP....., dN, δN....., P', P'', N'_u, N' sono tutti complanari, perchè normali ad N (e anche a k) e stanno nel piano tangente alla superficie nel nel punto P.

b) Interessa considerare, sulla superficie descritta da $P(u, v)$, le *linee di curvatura*, *geodetiche*, *assintotiche*.

Il punto P descrive una *linea di curvatura* della superficie quando la retta per P parallela a k, è tangente ad una linea [cioè la *rigata* descritta da tale retta è *sviluppabile*; cfr. seguente n. 9].

Il punto P descrive una *geodetica* della superficie quando la normale principale in P è parallela alla normale alla superficie.

Il punto P descrive un'*assintotica* della superficie quando la binormale in P alla curva coincide colla normale in P alla superficie.

Valgono i teoremi seguenti.

La equazione differenziale delle linee di curvatura ha una qualunque delle forme seguenti:

$$(6) \qquad dP \wedge dk \times k = 0, \quad dP \wedge dN \times N = 0, \quad dP \wedge dN = 0.$$

Se la tangente nel punto

$$Q = P + xk,$$

che descrive lo spigolo di regresso della sviluppabile, è parallela a k, si deve avere

$$dQ \wedge k = dP + kdx + xdk \wedge k = dP + xdk \wedge k = 0;$$

il numero x sodisfacente a tale condizione esiste *solo quando*

i due vettori $dP \wedge k$, $dk \wedge k$ sono paralleli, vale a dire solo quando

$$(dP \wedge k) \wedge (dk \wedge k) = 0, \quad \text{o, sviluppando,} \quad (dP \times dk) \cdot k = 0,$$

e in conseguenza vale la prima forma (6). Essendo $k = mN$, con $m = \text{mod}\, k$, si ha $dk = dm \cdot N + m \cdot dN$ e sostituendo nella prima (6) si ha subito la seconda. La terza vale per N e non per k perchè il vettore $dP \wedge dN$ è, o nullo, o parallelo ad N.

La equazione differenziale delle ***geodetiche*** *è*

$$(7) \qquad dP \wedge d^2P \times k = 0, \quad \text{e anche} \quad dP \wedge d^2P \times N = 0.$$

La *tangente* e la *binormale* sono parallele a dP e $dP \wedge d^2P$, e poichè dP è normale a k, ne segue che la *normale principale* è parallela a k solo quando la binormale, $dP \wedge d^2P$, è normale a k, e quindi valgono le (7).

La equazione differenziale delle ***assintotiche*** *è*

$$(8) \qquad d^2P \times k = 0, \quad \textit{e anche} \quad d^2P \times N = 0,$$

ovvero sotto altra forma,

$$(8') \qquad dP \times dk = 0, \quad \textit{e anche} \quad dP \times dN = 0.$$

La *binormale*, parallela a $dP \wedge d^2P$, è parallela a k solo quando

$$(dP \wedge d^2P) \wedge k = -d^2P \times k \cdot dP = 0,$$

che, per essere $dP \neq 0$, dimostra la (8). Differenziando la condizione $dP \times k = 0$, ovvero $dP \times N = 0$, si ha

$$d^2P \times k + dP \times dk = 0, \quad d^2P \times N + dP \times dN = 0$$

che dimostrano le (8').

c) *Per il punto generico P della superficie passano sempre, o due, o infinite, linee di curvatura, e se ve ne passano due sole esse si tagliano sotto angolo retto.*

Se ricordiamo che

$$dP = P'_u du + P'_v dv, \quad dN = N'_u du + N'_v dv,$$

allora l'ultima delle (6) assume la forma

$$a \cdot (P'_u \wedge N'_u) \cdot du^2 + (P'_u \wedge N'_v + P'_v \wedge N'_u) \cdot du dv + P'_v \wedge N'_v \cdot dv^2 = 0.$$

Questa, poichè i vettori $P'_u \wedge N'_u$ ecc. sono paralleli ad N, ammette *radici reali* per du/dv solo quando

$$A = (P'_u \wedge N'_v + P'_v \wedge N'_u)^2 - 4(P'_u \wedge N'_u) \times (P'_v \wedge N'_v) \geq 0.$$

Sviluppando questo discriminante A, tenendo conto della (5), supponendo [il che toglie nulla alla generalità poichè alle linee coordinate $v =$ cost. si possono sostituire le *traiettorie ortogonali* delle linee $u =$ cost.: cfr. seguente n. 8, b)]

$$(b) \qquad P'_u \times P'_v = 0,$$

e applicando note identità [Parte I, Cap. II, n. 4, c] si ha

$$\begin{aligned} A &= P'^2_u \cdot N'^2_v + P'^2_v \cdot N'^2_u - 2\,P'_u \times N'_v)^2 - 2P'_u \times N'_u \cdot P'_v \times N'_v + \\ &\qquad + 4(P'_u \times N'_v)^2 \\ &= P'^2_u \cdot N'^2_v + P'^2_v \cdot N'^2_u - 2(P'_u \times N'_u \cdot P'_v \times N'_v - (P'_v \times N'_v)^2) \\ &= P'^2_u \cdot N'^2_v + P'^2_v \cdot N'^2_u - 2(P'_u \wedge P'_v) \times (N'_u \wedge N'_v): \end{aligned}$$

se i vettori $P'_u \wedge P'_v$, $N'_u \wedge N'_v$, paralleli ad N, hanno *verso contrario*, allora si ha certamente $A \geq 0$: se, invece, i medesimi vettori hanno lo *stesso verso*, allora, il terzo termine di A non supera il prodotto dei moduli dei vettori P'_u, P'_v, N'_u, N'_v e quindi

$$A \geq (\text{mod } P'_u \cdot \text{mod } N'_v - \text{mod } P'_v \cdot \text{mod } N'_u)^2 \geq 0:$$

e, in conseguenza, esistono sempre radici reali $du\ dv$ della (a), cioè è dimostrata la prima parte del teorema.

Siano ora, per $P'_u \wedge N'_u \neq 0$, $du\ dv$, $\delta u\ \delta v$, due radici della (a), corrispondenti agli spostamenti dP, δP di P lungo le linee di curvatura. Per il prodotto di tali radici si ha, dalle (5), (b), dalle solite identità e tenuto conto che i vettori della (a) sono paralleli ad N,

$$\begin{aligned} \frac{du\,\delta u}{dv\,\delta v} &= \frac{P'_v \wedge N'_v \times N}{P'_u \wedge N'_u \times N} = \frac{(P'_v \wedge N'_v) \times (P'_u \wedge N'_u)}{(P'_u \wedge N'_u)^2} \\ &= -\frac{(P'_v \times N'_u)^2}{(P'_u \wedge N'_u)^2} = -\frac{P'^2_v \cdot \cos^2(P'_v, N)}{P'^2_u \cdot \operatorname{sen}^2(P'_u, N)} \end{aligned}$$

e quindi, per la (b),

$$(c) \qquad \frac{du\,\delta u}{dv\,\delta v} = -\frac{P'^2_v}{P'^2_u}.$$

Stando dunque la ipotesi $P'_u \wedge N'_u \neq 0$, dall'essere

$$dP = P'_u du + P'_v dv, \quad \delta P = P'_u \delta u + P'_v \delta v,$$

e dalle (b), (c) si ha

$$\frac{dP \times \delta P}{dv \cdot \delta v} = P'^2_u \frac{du\,\delta u}{dv\,\delta v} + P'^2_v = P'^2 - P'^2_u \frac{P'^2}{P'^2_u} = 0;$$

inoltre, se $P'_u \wedge N'_u = 0$ dalla (b) si ha pure $P' \wedge N' = 0$ e in conseguenza è dimostrata la seconda parte del teorema.

d) I numeri, funzioni di P e di dP,

$$(9) \qquad \frac{1}{r} = \frac{dP \times dN}{(dP)^2}, \quad \frac{1}{g} = \frac{dP \wedge d^2P \times N}{(\text{mod}\, dP)^3}, \quad \frac{1}{t} = \frac{dP \wedge dN \times N}{(dP)^2}$$

chiamansi rispettivamente *curvatura normale*, *curvatura geodetica*, *torsione geodetica*, della superficie nel punto P e nella direzione dP.

I numeri r, g, t sono, rispettivamente, i raggi di *curvatura* ***normale, geodetica,*** di ***torsione geodetica.***

Alle equazioni [cfr. b)] delle linee di *curvatura*, *geodetiche*, *assintotiche*, si possono dare, in virtù delle (9), le forme

$$1/t = 0, \quad 1/g = 0, \quad 1/r = 0,$$

valevoli in ogni punto P della linea (purchè esistente).

Il lettore può facilmente dedurre, in base a quanto abbiamo esposto nelle parti precedenti di questo numero, note proprietà dei numeri r, g, t [1]; noi ci limitiamo ai cenni precedenti e ad osservare che: *se γ, γ' sono linee della superficie uscenti da P, aventi, **tangente, normale principale, binormale,** parallele, rispettivamente a dP, N, $N \wedge dP$ e dP, $N \wedge dP$, N, allora, a meno del segno, $1/r$, $1/g$ sono le **flessioni** in P di γ e γ', e $1/t$ è la **torsione** di γ (o di γ' che è lo stesso)*: come facilmente si dimostra [cfr. nota precedente].

[1] C. Burali-Forti. *Sopra alcune questioni di Geometria differenziale* (Rend. Palermo, t. XII, 1898). *Fondamenti per la Geometria differenziale su di una superficie* (idem, t. XXXIII, 1912), trattazione indipendente dalle coordinate u, v di Gauss, ma per la quale occorre fare uso delle *omografie vettoriali*. Cfr. anche Bibliografia alla fine del volume.

e) Affinchè dP abbia la direzione di una *linea di curvatura* è necessario e sufficiente, per la ultima (6), che esista un numero r, funzione di P e di dP, tali che

$$dP = r dN \tag{10}$$

e r è, per la prima (9), il *raggio di curvatura normale* nella direzione dP.

Ponendo al posto di dP e dN, nella (10), i loro valori per mezzo delle derivate parziali di P ed N rispetto ad u e v, la (10) diviene

$$(P'_u - rN'_u)du + (P'_v - rN'_v)dv = 0$$

che è verificata solo quando

$$(P'_u - rN'_u) \wedge (P'_v - rN'_v) = 0$$

cioè, sviluppando,

$$(P'_u \wedge P'_v - r(P'_u \wedge N'_v - P'_v \wedge N'_u) + r^2 N'_u \wedge N'_v = 0. \tag{11}$$

Questa ammette certamente radici reali in r (cfr. *c*) e se ha due sole radici, esse dànno i *raggi di curvatura normale* in P nelle direzioni, ortogonali, delle due linee di curvatura che passano per P.

Indicando, come d'uso, con K e H, il *prodotto* e la *somma* delle *inverse* delle radici r della (11) si ha

$$\begin{aligned} K &= N'_u \wedge N'_v \times N \; P'_u \wedge P'_v \times N \\ H &= (P'_u \wedge N'_v - P'_v \wedge N'_u) \times N \; P'_u \wedge P'_v \times N \end{aligned} \tag{12}$$

che dànno, rispettivamente, la *curvatura totale* (o di GAUSS), K, e la *curvatura media*, H, della superficie in P.

f) Nel punto P si ha un *ombelico*, quando per esso passano infinite linee di curvatura. Ciò avviene quando i coefficienti della (*a*) sono tutti nulli: il che, come è ovvio, si verifica solo quando P'_u e P'_v sono equimultipli di N'_u ed N'_v. Vale a dire, se in P vi è un ombelico, la r della (10) è funzione di P soltanto.

Se, dunque, tutti i punti della superficie sono ombelichi si ha $dP = r dN$, $\delta P = r \delta N$, qualunque siano d, δ e qualunque sia P; applicando δ alla prima e d alla seconda si ha $\delta r \cdot dP = dr \cdot \delta P$,

cioè $dr = \partial r = 0$ e quindi $r = \text{cost.}$ Se $1/r = 0$ la (10) dà $dN = 0$, cioè $N = \text{cost.}$; se $1/r \neq 0$ allora la (16), integrata, dà $P = O + rN$, e quindi: *tutti i punti di una superficie sono ombelichi, solo quando la superficie è piana o sferica.*

g) La equazione differenziale (7) delle geodetiche è di terzo ordine in du dv e quindi ammette sempre un integrale reale che contiene non più di due costanti arbitrarie. Ne segue che: *per un punto passa una sola geodetica avente, in quel punto, data direzione:* ecc.

Si ha l'importante teorema seguente. *Sia γ una geodetica della superficie e λ un sistema ∞^1 di linee della superficie, nessuna delle quali è tangente a γ. Per il punto generico P di γ passi una delle linee λ la cui tangente in P è parallela al vettore non nullo x, funzione di P. Infine l'angolo che x fa con la tangente a γ in P sia di θ radianti. Ciò posto l'equazione differenziale di γ è*

$$d\theta = -\frac{N \wedge x \times dx}{x^2}, \tag{13}$$

ovvero, se x è unitario, $x^2 = 1$,

$$d\theta = -N \wedge x \times dx \text{ [1]}. \tag{13'}$$

Supposto x unitario e detto s l'arco di γ, si ha

$$dP/ds = \cos\theta \cdot x + \operatorname{sen}\theta \cdot N \wedge x, \quad \text{da cui} \quad \cos\theta = (dP/ds) \times x$$

che differenziata dà

$$-\operatorname{sen}\theta \cdot d\theta = (d^2P/ds^2) \times x + (dP/ds) \times dx;$$

ma d^2P/ds^2 deve esser parallelo ad N poichè γ è geodetica, e quindi

$$-\operatorname{sen}\theta \cdot d\theta = \operatorname{sen}\theta \cdot N \wedge x \times dx$$

che per essere $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ dimostra la (13'), dalla quale si passa ovviamente alla (13) per x non unitario.

[1] È questa la forma assoluta semplicissima che assume una nota e complessa equazione differenziale di Gauss [cfr. C. Burali-Forti, Rend. Palermo, l. c.].

h) Invece le assintotiche (8), (8') possono o no esistere. Esprimendo con le solite derivate parziali la equazione (8'), seconda forma, e tenendo conto della (5') si ha

$$P'_u \times N'_v \cdot du^2 + 2P'_u \times N' \cdot du dv + P' \times N' \cdot dv^2 = 0$$

che ha radici reali per du dv, solo quando

$$(P'_u \times N'_v)^2 - P'_u \times N'_u \cdot P' \times N = -(P'_u \times P') \times (N'_u \times N') \geq 0,$$

vale a dire, per la prima delle (12), solo quando $K \leq 0$ e quindi: *le linee assintotiche esistono soltanto nelle superficie la cui curvatura totale è o nulla o negativa* (1).

8. Inviluppi e traiettorie di un sistema ∞^1 di linee. — Un sistema ∞^1 di linee si individua dando un punto $P(u, v)$

(1) Il metodo elementare che abbiamo ora applicato, dà abbastanza semplicemente le proprietà differenziali delle superficie; meno semplicemente che con le omografie [cfr. Rend. Palermo, l. c.], ma in modo certo più semplice, e sempre *geometrico* e *assoluto*, di quello che lo diano gli ordinari metodi algebrici (oltre le coordinate u, v di Gauss, anche le coordinate cartesiane x, y, z di P). Diamo un cenno di un procedimento generale.

Valga la (*b*) e si ponga

$$a = \text{mod}\, P'_u, \quad b = \text{mod}\, P'_v, \quad u = P'_u / a, \quad v = P'_v / b;$$

allora u, v, N è terna-unitaria-ortogonale-destrogira. Inoltre si indichino con r_u, g_u, t_u, i numeri r, g, t nelle direzioni della linea $v = \text{cost.}$; e analogamente per r_v, g_v, t_v. Si ha, ad es.,

$$1/r_u = u \times N'_u / a, \quad 1/r_v = v \times N'_v / b$$
$$1/t_u = v \times N'_u / a, \quad 1/t_v = -u \times N'_v / b$$

e si trova subito

$$1/t_u + 1/t_v = 0 \qquad \text{(teorema di Bonnet).}$$

Inoltre se dP fa angolo di φ radianti con u si ha

$$(\alpha) \qquad 1/r = (1/r_u)\cos^2\varphi + (1/r_v)\,\text{sen}^2\varphi + (1/t_u)\,\text{sen}\,2\varphi$$
$$(\beta) \qquad 1/t = (1/r_v - 1/r_u)\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi + (1/t_u)\cos 2\varphi.$$

Variando soltanto φ, la (α) dà per $1/r$ un *massimo* e un *minimo* per $\text{tg}\,2\varphi = (2/t_u)/(1/r_v - 1/r_u)$. Ora per tali valori di φ, che differiscono di $\pi/2$, la (β) dà $1/t = 0$ e quindi, resta così provato il teorema (c) per via indiretta. Ecc.

funzione di due variabili u e v in modo che per un sistema di valori di u o di v si abbiano le linee del sistema.

a) Se esiste una linea tangente a tutte le linee del sistema considerato, essa si chiama *inviluppo* del sistema.

Supponendo che l'inviluppo esista, la sua equazione, sulla superficie $P(u, v)$ che contiene il sistema, sarà della forma

$$f(u, v) = 0 \tag{1}$$

che dovrà dedursi dalla condizione geometrica

$$\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} = 0 \tag{2}$$

(la quale dà, oltre che l'inviluppo, anche dei punti singolari delle linee u, v) poichè dalla nota formula

$$dP = \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv$$

si trae subito

$$dP \wedge \frac{\partial P}{\partial u} = -\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} dv, \quad dP \wedge \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} du$$

e quindi, se è vera la (2), il vettore dP è parallelo alle tangenti in P alle linee u, v che passano per esso.

Se l'inviluppo delle linee $u = \text{cost.}$ esiste, le linee $v = \text{cost.}$ hanno tale inviluppo come loro inviluppo propriamente detto, oppure come linea limite [cfr. gli esempi 2°, 3°].

b) Se θ è un numero costante è *evidente* che:

$$dP \times \frac{\partial P}{\partial u} = \text{mod}\, dP \cdot \text{mod} \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \cos\theta \tag{3}$$

è la equazione differenziale delle linee che tagliano sotto l'angolo costante di θ *radianti tutte le linee del sistema* $v = \text{cost.}$

Si può dare alla (3) una forma più adatta alla integrazione. Osservando che, per la (3), i vettori dP, $\partial P/\partial u$ formano l'angolo θ e supposto dv positivo (il che toglie nulla alla generalità potendosi cambiare θ in $-\theta$), si ha

$$dP \times \frac{\partial P}{\partial u} = \text{mod}\left(dP \wedge \frac{\partial P}{\partial u}\right) \text{ctg}\,\theta = \text{mod}\left(\frac{\partial P}{\partial v} \wedge \frac{\partial P}{\partial u}\right) \text{ctg}\,\theta \cdot dv\,;$$

allora l'equazione precedente, sostituendo a dP il suo valore, diventa

$$(3') \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 du + \left(\frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} - \operatorname{mod}\left(\frac{\partial P}{\partial v} \times \frac{\partial P}{\partial u}\right) \operatorname{ctg} \varphi\right) dv = 0.$$

È poi chiaro che l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali è

$$(4) \qquad dP \times \frac{\partial P}{\partial u} = 0$$

ovvero, corrispondentemente alla forma (3'),

$$(4') \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 du + \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} dv = 0.$$

Esempi. — 1°. *Sistema delle rette di un piano sulle quali due rette ortogonali fisse determinano un segmento di lunghezza costante a.*

Sia O il punto comune alle due rette ortogonali parallele ai vettori unitari u, iu, e queste rette siano tagliate dalla retta generica del sistema nei punti A, B la cui distanza, fissa, è a. Se $\varphi = \operatorname{ang}(B - A, u)$ e P è il punto della retta AB la cui distanza da A è v, allora si ha

$$P = O - a \cos \varphi \cdot u + v e^{i\varphi} u.$$

Il punto $P(v, \varphi)$ è funzione di v e di φ. Le rette del sistema considerato sono quelle di equazione $\varphi = \text{cost.}$ Il sistema $v = \text{cost.}$ è formato da ellissi di centro O, con gli assi paralleli ad u, iu essendo $a - v$ e v le lunghezze dei semi assi (*tornio ellittico* di Leonardo da Vinci).

Poichè il sistema è piano la equazione

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} \times \frac{\partial P}{\partial v} = 0 \quad \text{equivale a} \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} \times i \frac{\partial P}{\partial v} = 0$$

che dà subito

$$a \operatorname{sen} \varphi \cos(\pi/2 + \varphi) + v = 0, \quad \text{cioè} \quad v = a \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

Il sistema di rette e il sistema di ellissi, hanno dunque un inviluppo proprio che è descritto dal punto

$$Q = O - a \cos \varphi \cdot u + a \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot e^{i\varphi} u$$
$$O - a \cos^3 \varphi \cdot u + a \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot iu;$$

è l'*asteroide* la cui equazione cartesiana è

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Dalla espressione di r si ricava subito la costruzione grafica del punto Q sulla retta AB: si disegna il rettangolo $OAMB$ e il punto Q è il piede della perpendicolare condotta da M sulla retta AB (nota costruzione *cinematica*).

Se si vogliono le traiettorie ortogonali delle rette AB, si ha come loro *equazione differenziale*

$$dP \times \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2 dr + \frac{\partial P}{\partial r} \times \frac{\partial P}{\partial \varphi} d\varphi = 0$$

o ancora

$$dr + a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 0$$

da cui integrando

$$r = r_0 + \frac{a}{2} \cos^2 \varphi$$

che dà una costruzione geometrica molto semplice di r. Si osservi che le traiettorie ortogonali così ottenute sono le curve parallele dell'asteroide che ha le cuspidi sulla asteroide inviluppata da AB e sulle bisettrici delle due rette fisse ortogonali.

Il lettore può trovare le traiettorie ortogonali del sistema di ellissi $r =$ cost.

2°. *Sistema di ellissi coassiali i cui semi-assi hanno un prodotto costante* m^2.

Se r è uno dei semi-assi, m^2/r è l'altro e allora

$$P = O + r \cos\varphi \cdot u + \frac{m^2}{r} \operatorname{sen}\varphi \cdot iu$$

dà il sistema di ellissi $r =$ cost.: mentre il sistema $\varphi =$ cost. è formato da iperboli equilatere aventi per assintoti gli assi dell'ellisse e la iperbole $\varphi = \pm \pi/4$ come *linea limite*.

Operando come in *a*), l'inviluppo ha per equazione

$$\frac{m^2}{r} \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{m^2}{r} \cos^2 \varphi = 0, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{r} \cos 2\varphi = 0:$$

ma r è finito e quindi si ha l'inviluppo per $\varphi = \pm \pi/4$, cioè la iperbole limite dell'altro sistema.

3°. Sia $P(t)$ un punto funzione della variabile numerica t e si indichino con gli apici le derivate di P rispetto a t. Il punto

$$Q(t, x) = P + xP'$$

descrive, col variare di t, x, la *sviluppabile osculatrice* della linea P; le linee $t =$ cost. sono le *generatrici* della superficie; le linee $x =$ cost. tagliano le generatrici ed hanno come *linea limite*, per $x = 0$, la linea P. La condizione (2) per l'inviluppo diviene

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) \wedge \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = (P' + xP'') \wedge P = xP'' \wedge P = 0$$

e poichè $P' \wedge P'' \neq 0$, in generale, l'inviluppo si riduce alla linea P, come era facile prevedere.

Volendo le linee della superficie Q che tagliano sotto l'angolo costante θ le generatrici si può applicare la (3'). È peraltro più semplice considerare P funzione dell'arco s; allora

$$Q = P + xt$$

e si ha subito, indicando con gli apici le derivate rispetto ad s,

$$Q' \times t = (1 + x')t + (x\rho n) \times t = 1 + x';$$

quindi deve essere

$$1 + x' = \sqrt{(1 + x')^2 + x^2\rho^2 \cos^2\theta}$$

dalla quale si ha, con calcolo ovvio,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho}x - 1$$

che è equazione differenziale lineare del 1° ordine. Per $\theta = \pi/2$ essa dà $x = -s + c$ e si ritrovano le *evolventi*. Per $\theta \neq \pi/2$ si ha

$$x = c \cdot e^{\int \operatorname{ctg}\theta \cdot \rho\, ds} + \operatorname{tg}\theta.$$

4°. Sia O punto fisso e u vettore unitario funzione di t. La retta Ou descrive un cono il cui punto generico è

$$Q(t, x) = O + xu$$

ed è per $t =$ cost. che si hanno le generatrici.

Le traiettorie, sotto angolo θ, delle generatrici hanno, in virtù della (3'), la equazione differenziale

$$dx - \text{mod}(x \cdot u \wedge u') \cdot \text{ctg}\,\theta \cdot dt = 0,$$

che, per essere u' normale ad u e supposto x positivo, dà

$$\frac{dx}{x} = \text{ctg}\,\theta \cdot \text{mod}\,du$$

e integrando

$$x = x_0 e^{\text{ctg}\,\theta \cdot \text{mod}\,du}.$$

Lo stesso resultato si può ottenere come nell'esempio 3° considerando x funzione di t [1].

9. Superfici rigate. - Siano, P un punto ed u un vettore, non nullo, funzioni della variabile numerica t. Col variare di t, la retta condotta da P parallelamente ad u, la retta Pu, descrive una *superficie rigata* il cui punto generico è

$$Q = P + xu \tag{1}$$

funzione di t ed x, per x variabile in tutto il campo dei numeri reali. Le linee $t =$ cost. sono le *generatrici*, le rette Pu; le linee $x =$ cost. tagliano tutte le generatrici.

a) Il piano tangente in Q alla rigata, e che, ovviamente, contiene la generatrice Pu, è normale al vettore

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \wedge \frac{\partial Q}{\partial x} = (P' + xu') \wedge u, \tag{2}$$

ove con gli apici si indicano le derivate, totali, rispetto a t, e quindi il *piano assintotico* è normale al vettore

$$u \wedge u' \tag{3}$$

poichè è questo, a meno del segno, il limite del vettore (2), diviso per x, quando si fa tendere x a $\pm\infty$.

Il piano tangente in Q avrà giacitura indipendente da x solo quando i vettori (2), (3) sono paralleli, cioè

$$(P' \wedge u + xu' \wedge u) \wedge (u \wedge u') = P' \times u \wedge u' \cdot u = 0$$

[1] Cfr. Bibliografia per interessanti inviluppi e traiettorie ottenute da Bottasso e Toscano.

e in conseguenza: *affinchè la rigata sia* ***sviluppabile*** *è necessario e sufficiente che si abbia*

$$P' \times u \times u' = 0 \tag{4}$$

in tutto il campo di variazione di t.

Se v è vettore normle ad u ma non normale ad u', cioè si ha $v \times u = 0$ e $v \times u' \neq 0$, allora esiste x tale che il vettore (2) è parallelo e v, perchè da

$$(P' \times u + xu' \times u) \times v = 0$$

si trae

$$P' \times v \cdot u + xu' \times v \cdot u = 0$$

e quindi

$$x = - P' \times v / u' \times v. \tag{5}$$

Se la rigata è sviluppabile, cioè vale la (4), allora il numero (5) è indipendente da v, poichè la (4) dà $u' = hP + ku$, da cui $u' \times v = hP' \times v$ e quindi $x = -1/h$. Se invece la rigata non è sviluppabile, cioè non vale la (4), allora

$$Q = P - \frac{P' \times v}{u' \times v} u \tag{6}$$

è il punto della generatrice uscente da P nel quale il piano tangente è normale a v.

In particolare se v è normale al piano assintotico, cioè è parallelo al vettore $(u \times u') \times u$, allora la (6) dà il *punto centrale*

$$C = P + \frac{(P' \times u) \times (u \times u')}{(u \times u)^2} u \tag{7}$$

della rigata gobba, cioè il punto nel quale il piano tangente è normale al piano assintotico.

b) La intersezione della rigata col piano uscente dal punto fisso O e normale al vettore costante, non nullo, a, è descritta dal punto

$$Q = P - \frac{(P - O) \times a}{u \times a} u \tag{8}$$

poichè il punto generico (1) stà nel piano considerato solo quando $(Q - O) \times a = 0$ [1].

c) Supposto u unitario, il che toglie nulla alla generalità, si ottengono facilmente le *traiettorie ortogonali delle generatrici*, le linee $t =$ cost. Ciò può farsi in due modi.

Dalla (4') del n. 8, e nelle ipotesi fatte, la equazione differenziale delle traiettorie ortogonali delle linee $t =$ cost. è

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{\partial Q}{\partial x} \times \frac{\partial Q}{\partial t}\, dt = 0, \quad \text{cioè,} \quad dx + u \times dP = 0$$

che si integra subito e dà

$$x = x_0 - \int u \times dP \tag{9}$$

essendo x_0 una costante arbitraria.

[1] La stessa questione si può risolvere così. Nella (1) si determini x come funzione di t in modo che Q descriva una linea piana. Ciò può farsi in due modi. La linea descritta da Q stia in un piano normale ad a; allora $Q' = P' + x'u + xu'$ deve essere normale ad a e il numero x funzione di t è determinato dalla equazione differenziale lineare del 1° ordine

$$P' \times a + x' \cdot u \times a + x \cdot u' \times a = 0$$

che si integra facilmente. Oppure si può porre la condizione che il vettore Q' sia parallelo ad un piano fisso, vale a dire [Parte I, Cap. V, n. 3] si abbia $Q' \wedge Q'' \times Q''' = 0$, che, per la (1), dà una equazione differenziale del terzo ordine. In uno qualunque dei due modi la soluzione generale della equazione differenziale è data da $x = -(P - O) \times a, u) \times a$ che abbiamo ottenuta nel testo senza far uso di derivate.

Il calcolo mediante la condizione $Q' \wedge Q'' \times Q''' = 0$ è assai complicato. Diamo come esempio un caso particolare: *la linea descritta da P è piana e di arco s, il vettore u è costante (cilindro).* Si ha

$$Q' = t + x'u, \quad Q'' = \frac{1}{\rho}\, it + x''u, \quad Q''' = -\frac{\rho'}{\rho^2}\, it - \frac{1}{\rho^2}\, t + x'''u,$$

con gli apici indicandosi le derivate rispetto ad s. La predetta condizione diviene

$$\rho^2 x''' + \rho\rho' x'' + x' = 0$$

il cui integrale generale è quello già noto, ma che può ottenersi direttamente sotto la forma

$$x = c_1 + c_2 \int \rho \operatorname{sen}(\xi + c_3)\, d\xi$$

essendo c_1, c_2, c_3 costanti arbitrarie e ξ tale che $ds = \rho d\xi$.

Oppure: supposto x funzione di t si pone la condizione

$$Q' \times u = 0, \quad \text{cioè} \quad (P' + x'u + xu') \times u = 0$$

che, per essere $u' \times u = 0$, dà $P' \times u + x' = 0$ che integrata da ancora la (9).

La costante arbitraria x_0 che comparisce nella (9) dice subito come: *ottenuta una delle traiettorie ortogonali se ne possono ottenere infinite altre portando sulle generatrici segmenti costanti* [1].

d) Dalla (4) risulta che: *una rigata sviluppabile è, o un cono, o un cilindro, o il luogo delle tangenti ad una linea* (che chiamasi ***spigolo di regresso*** della rigata).

Infatti la (4) dà: o $P' = 0$, cioè $P =$ cost., caso del *cono*; o $u' = 0$ (o anche $u \parallel u' = 0$), cioè u con direzione costante, caso del *cilindro*; ovvero esiste x funzione di t tale che Q' è parallelo ad u.

Il punto C dato dalla (7) è, o il *vertice del cono*, o il punto che descrive la linea *spigolo di regresso* della sviluppabile; resta escluso soltanto il *cilindro* (C costante all'infinito).

e) Supponiamo che il punto P descriva lo *spigolo di regresso* della *rigata sviluppabile*, e per P valgano le solite notazioni s, ρ, τ, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$. La rigata sviluppabile è, in tal caso, descritta dalla retta $P\boldsymbol{t}$.

In un piano α si costruisca la linea, descritta da P_1, che ha arco s e raggio di curvatura ρ [Parte II, Cap. I, n. 5] e al punto generico (1), $Q = P + x\boldsymbol{t}$, si faccia corrispondere in α il punto

$$Q_1 = P_1 + x\boldsymbol{t}_1, \tag{1'}$$

essendo $\boldsymbol{t}_1 = dP_1/ds$. Si ha

$$dQ = (ds + dx)\boldsymbol{t} + (x/\rho)\boldsymbol{n}, \quad dQ_1 = (ds + dx)\boldsymbol{t}_1 + (x/\rho)\boldsymbol{i}_1$$

e in conseguenza

$$(dQ)^2 = (dQ_1)^2 \tag{10}$$

il che prova che: *la rappresentazione* (1') *della rigata nel piano* α *conserva le distanze e quindi gli angoli e le aree, cioè dà lo sviluppo della rigata nel piano.*

[1] Se u non è unitario si ottiene una equazione lineare del 1° ordine. È preferibile supporre $u^2 = 1$.

Se nel piano α si fissa un punto O e un vettore unitario a, allora è ovvio che il punto

$$(11) \qquad Q_1 = P_1 - (P_1 - O) \times a\, t_1 \times a\, (t_1$$

descrive una *retta*, col variare di s, e quindi il punto

$$(12) \qquad Q = P - (P_1 - O) \times a\, t_1 \times a\, t$$

descrive la *geodetica* generica della sviluppabile. Si hanno così le geodetiche della sviluppabile valendosi delle integrazioni fatte per determinare la linea piana descritta da P_1.

e') La questione *e*) può trattarsi per il *cono* e per il *cilindro*. Esaminiamo il caso del *cono* di vertice V e descritto dalla retta Vu, con u vettore unitario funzione di t. Nel piano α si fissi un punto O e un vettore unitario a. Valendo la (1) per il punto generico Q del cono si ponga

$$(1'') \qquad Q_1 = O + x e^{i\varphi} a$$

essendo φ una funzione di t che deve essere tale che

$$(dQ_1)^2 = (dx \cdot e^{i\varphi} a + x d\varphi \cdot e^{i\varphi} i a)^2 = (dx)^2 + x^2 (d\varphi)^2$$

eguagli

$$(dQ)^2 = (dx \cdot u + x \cdot du)^2 = (dx)^2 + x^2 (du)^2,$$

vale a dire si abbia

$$(13) \qquad d\varphi = \text{mod}\, du$$

che, con una quadratura, determina φ e quindi Q_1, cioè si ha lo *sviluppo del cono* nel piano α.

È ovvio che per $x = h \cos(\varphi - \theta)$, ove h, θ sono costanti arbitrarie, il punto Q_1 descrive una retta in α e quindi le *geodetiche del cono* sono descritte dal punto

$$(14) \qquad Q = V + h(\cos(\varphi - \theta))\, u$$

e tali geodetiche si ottengono con la sola quadratura (13) [1].

[1] Per altre proprietà delle rigate cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali* (Rend. Palermo, Nota IV, Tomo XXV (1908)). C. Burali-Forti: *Geometria metrico proiettiva* (Bocca, Torino, 1904); *Geometria analitico proiettiva* (G. B. Petrini, Torino, 1912): *Sopra alcune superficie rigate* (Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXIII, s. 5ª (1914), pp. 201-208): *Sulle superficie rigate* (ibidem,

10. **Superficie di rotazione ed elicoidali.** — Consideriamo i seguenti elementi: un punto fisso O; un vettore unitario, fisso, k; un vettore unitario i, fisso, normale a k; l'operatore i per i vettori normale a k; un numero reale m costante; un punto R funzione della variabile numerica t.

La proiezione ortogonale di R sulla retta condotta da O parallelamente a k, è il punto, funzione di t soltanto,

$$Q = O + (R - O) \times k \cdot k. \tag{1}$$

Dando ad R la *rotazione* di φ radianti intorno alla retta Ok, indi la *traslazione* $m\varphi k$ si ottiene il punto

$$P = Q + e^{i\varphi}(R - Q) + m\varphi k \tag{2}$$

funzione di t e di φ che descrive una *superficie di rotazione* per $m = 0$, e una *superficie elicoidale* per $m \neq 0$, essendo *asse* della superficie la retta condotta da O parallelamente a k.

Una volta dato R in funzione di t è pure determinato Q funzione soltanto di t, e P funzione di t e di φ. Le linee $\varphi = \text{cost.}$ sono linee congruenti alla linea R; le linee $t = \text{cost.}$ sono eliche per $m \neq 0$, e circonferenze (i paralleli) per $m = 0$.

I vari problemi si trattano facilmente mediante la espressione data di P. Ne diamo alcuni esempi nei quali indichiamo con gli apici le derivate di R e Q (funzioni di t soltanto) rispetto a t.

a) Per le derivate parziali di P rispetto a t e φ si ha intanto

$$\frac{\partial P}{\partial t} = R' \times k \cdot k + e^{i\varphi}(k \wedge R') \wedge k \tag{3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = mk - e^{i\varphi}(k \wedge (R - O)) \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 = R'^2 \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2 = m^2 + (k \wedge (R - O))^2 \tag{6}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} \times \frac{\partial P}{\partial \varphi} = m \cdot R' \times k - k \wedge (R - O) \times R'. \tag{7}$$

vol. XXVII, s. 5ª (1918), pp. 283-287): *Rigate sviluppabili con assegnato cono direttore o con assegnata direttrice.* (Atti R. Ist. Veneto, t. LXXVII, parte 2ª (1918), pp. 303-316).

Infatti. Dalle (1), (2) si ha

$$\frac{\partial P}{\partial t} = Q + e^{\frac{\pi}{2}} R' - Q = R' \times k \cdot k + e^{\frac{\pi}{2}} R' = R' \times k \cdot k$$
$$= R' \times k \cdot k + e^{\frac{\pi}{2}} k \times (R' \times k)$$

che dimostra la (3). In modo analogo si ottiene la (4). Dalle (3), (4) si ottengono subito le (5), (6), (7) ricordando che se a, b sono vettori normali a k si ha

$$(e^{\frac{\pi}{2}} a)^2 = a^2, \quad (e^{\frac{\pi}{2}} a) \times (e^{\frac{\pi}{2}} b) = a \times b.$$

b) La equazione differenziale delle *traiottorie ortogonali* delle linee $\varphi =$ cost. è, come è noto,

$$\frac{\partial P}{\partial t} \times dP = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 dt + \frac{\partial P}{\partial t} \times \frac{\partial P}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = 0$$

che per le formule precedenti dà subito

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{R'^2}{k \times (R - O) \times R' - m R' \times k} dt \tag{8}$$

essendo φ_0 una costante arbitraria.

La equazione differenziale delle *traiettorie ortogonali* delle linee $t =$ cost. è

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} \times dP = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \times \frac{\partial P}{\partial t} dt = 0$$

che per le formule precedenti dà subito

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{k \times (R - O) \times R' - m R' \times k}{m^2 + k \times (R - O)^2} dt \tag{9}$$

essendo φ_0 una costante arbitraria.

Per $m = 0$ e se la linea descritta da R sta in un piano passante per l'asse (è semi-meridiana), allora la (8) dà i *paralleli*: invece, qualunque sia R, la (9) dà le *meridiane*, cioè le traiettorie ortogonali dei paralleli $t =$ cost.

c) Ogni piano uscente dall'asse Ok taglia la superficie secondo una *linea meridiana*. Se la linea descritta da R sta in uno di tali piani, allora essa è una semi-meridiana.

Supponiamo che la linea descritta da R non stia in un piano uscente dall'asse e proponiamoci di trovare la equazione, $f(t, \varphi) = 0$, della linea meridiana che sta, ad es., sul piano meridiano normale ad i. Tale equazione è

$$(10) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{(R - O) \times i}{(R - O) \times ii}.$$

Infatti. Deve essere $(P - O) \times i = 0$ e quindi per la (2)

$$e^{-\varphi} (R - Q) \times i = 0, \quad \text{cioè} \quad (R - Q) \times e^{-\varphi} i = 0;$$

ma, come si è già osservato, dalla (1) si ha

$$R - Q = k \wedge (R - O) \wedge k = -i (R - O) \wedge k$$

e quindi la condizione precedente diviene

$$(R - O) \wedge k \times e^{-\varphi} ii = 0;$$

dalla identità

$$R - O = (R - O) \times i \cdot i + (R - O) \times ii \cdot ii + (R - O) \times k \cdot k$$

si ha, per essere i, ii, k sistema ortogonale destro,

$$(R - O) \wedge k = -(R - O) \times i \cdot ii + (R - O) \times ii \cdot i$$

e, in conseguenza,

$$(R - O) \wedge k \times e^{-\varphi} ii = -(R - O) \times i \cdot \cos \varphi + (R - O) \times ii \cdot \operatorname{sen} \varphi = 0,$$

da cui si ha la (10).

11. Punto funzione di tre variabili. — Il punto P funzione delle variabili numeriche u, v, w, in assegnati intervalli, descrive in generale un *solido*.

Una relazione $f(u, v, w) = 0$ tra le variabili u, v, w individua una particolare *superficie* e nel punto P, generico, di essa il vettore

$$(1) \qquad dP = \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv + \frac{\partial P}{\partial w} dw,$$

ove du, dv, dw soddisfano alla condizione

$$(2) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw = 0.$$

sta nel piano tangente.

Due relazioni $f(u, v, w) = 0$, $\varphi(u, v, w) = 0$ individuano una *linea* che nel punto P ha la tangente parallela al vettore (1) ove i differenziali du, dv, dw soddisfano alle due condizioni $df = 0$, $d\varphi = 0$, analoghe alla (2).

Se i vettori che sono le derivate parziali di P rispetto ad u, v, w non sono complanari, allora le superficie

$$u = \text{cost.}, \quad v = \text{cost.}, \quad w = \text{cost.},$$

hanno le normali, in P, parallele ai vettori

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \wedge \frac{\partial P}{\partial w}\right), \quad \left(\frac{\partial P}{\partial w} \wedge \frac{\partial P}{\partial u}\right), \quad \left(\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}\right).$$

Un sistema ∞^1 di superficie si individua dando P funzione di tre variabili u, v, w, il sistema ottenendosi, ad es., per $w = \text{cost.}$. L'*inviluppo*, se esiste, di tale sistema ha una equazione $f(u, v, w) = 0$ che è data, ovviamente, da

$$\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \times \frac{\partial P}{\partial w} = 0:$$

mentre le *traiettorie ortogonali* delle superficie del sistema sono linee le cui equazioni $f(u, v, w) = 0$, $\varphi(u, v, w) = 0$ sono, ovviamente, gli integrali delle equazioni differenziali,

$$dP \times \frac{\partial P}{\partial u} = 0, \quad dP \times \frac{\partial P}{\partial v} = 0.$$

Bastino questi pochi cenni: il lettore potrà applicare a casi particolari e ritrovare tutte le formule che si dànno con gli ordinari sistemi di coordinate.

12. **Aree e volumi.** — *a*) Il punto $P(u, v)$ descrive una superficie, come è noto. L'*area* σ di tale superficie è data da

$$(1) \qquad \sigma = \iint \text{mod}\left(\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv$$

i limiti dell'integrale doppio dipendendo dal modo di variazione di u e v nell'area considerata.

Si ottengono dalla (1) le ordinarie, e complicate, formule cartesiane, come il lettore può verificare per esercizio.

a') In particolare se $P(u, v)$ varrà in un piano fisso, allora, attribuendo a σ un segno, si ha

$$\sigma = \iint \frac{\partial P}{\partial u} \times i \frac{\partial P}{\partial v} \, du dv \tag{1'}$$

e anche dalla (1') si ottengono le ordinarie formule cartesiane e polari.

b) Il punto $P(u, v, w)$ descrive un solido il cui volume τ, con un segno, è dato da

$$\tau = \iiint \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \times \frac{\partial P}{\partial w} \, du \, dv \, dw ; \tag{2}$$

per i limiti dei tre integrali come in a) e ottenendosi dalla (2) le ordinarie formule per le coordinate cartesiane, polari e semi-polari, ecc. [1].

[1] Si vedano nella Bibliografia nuove notazioni e omografie delle interessanti applicazioni, specialmente di M. Bottasso.

CAPITOLO II.

Formule di Calcolo integrale.

1. Teoremi sul gradiente e sulla divergenza. — *a*) Sia σ una superficie chiusa che comprende il volume τ; $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario normale a σ e volto verso l'interno di τ; u una funzione numerica dei punti P del campo (τ, σ), monodroma, finita e continua insieme colle sue derivate prime; $\boldsymbol{u}$ un vettore funzione di P, del quale si possa considerare la div e la rot. Hanno luogo le seguenti eguaglianze:

$$\int \operatorname{grad} u \, d\tau = -\int u \boldsymbol{n} \, d\sigma \tag{1}$$

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{u} \, d\tau = -\int \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} \, d\sigma \tag{2}$$

$$\int \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \, d\tau = -\int \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{u} \, d\sigma . \tag{3}$$

Cominciamo col dimostrare la seconda. Dividiamo il campo τ in tanti elementi parallelepipedi retti. Su di una faccia contigua a due di questi, il prodotto $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}$ ha egual valore assoluto ma segno contrario: dunque l'integrale di tale prodotto esteso a σ, cioè il secondo membro della (2), sarà eguale alla somma degli integrali analoghi estesi alle superficie dei vari elementi parallelepipedi.

Consideriamo adunque uno di questi e due facce opposte, distanti di dh e normali alla direzione di un vettore unitario $\boldsymbol{i}$ costante arbitrario e si ponga $u_1 = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{i}$. La parte del detto integrale relativa alla base inferiore è $u_1 d\sigma$; quella relativa alla faccia opposta è $-(u_1 + du_1) d\sigma$; e la parte relativa alle due facce è

$$-du_1 d\sigma = -\operatorname{grad} u_1 \times \boldsymbol{i} dh \cdot d\sigma = -\operatorname{grad} u_1 \times \boldsymbol{i} d\tau ,$$

essendo $d\tau$ l'elemento $dh \cdot d\sigma$ di volume. Ricordando che

$$\operatorname{div}(u_1 \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} \times \operatorname{grad} u_1,$$

l'espressione precedente varrà

$$-\operatorname{div}(u_1 \boldsymbol{i}\, d\tau).$$

Lo stesso può ripetersi per le altre due coppie di facce opposte, normali ad altri due vettori unitari $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ che formino con $\boldsymbol{i}$ un sistema ortogonale-destrogiro. Quindi l'integrale esteso alla superficie di tutto il parallelepido elementare è

$$-\operatorname{div}(u_1 \boldsymbol{i} + u_2 \boldsymbol{j} + u_3 \boldsymbol{k}\, d\tau) = -\operatorname{div} \boldsymbol{u} \cdot d\tau;$$

e in conseguenza la (2) è dimostrata.

Per dimostrare la (1) si applichi la (2) al vettore $u\boldsymbol{a}$, essendo $\boldsymbol{a}$ un vettore costante qualunque, u un numero funzione di P. Si ha

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} u,$$

e quindi

$$\boldsymbol{a} \times \int \operatorname{grad} u\, d\tau = -\boldsymbol{a} \times \int u \boldsymbol{n}\, d\sigma;$$

in conseguenza, per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$, risulta la (1).

Applichiamo ancora la (2) al vettore $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{a}$. Ricordando che

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u},$$

si otterrà

$$\boldsymbol{a} \times \int \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, d\tau = -\int \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{a}\, d\sigma = -\boldsymbol{a} \times \int \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{u}\, d\sigma$$

e quindi la (3).

La (1) esprime il così detto *teorema del gradiente*; la seconda *il teorema della divergenza* o del *flusso*. Infatti il prodotto $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}\, d\sigma$ dicesi flusso, del vettore $\boldsymbol{u}$, entrante in σ attraverso l'elemento di superficie $d\sigma$; e l'integrale esteso a σ dicesi flusso totale; preso con segno contrario esprime il flusso uscente: onde *l'integrale della divergenza di un vettore esteso ad un volume τ, è eguale al flusso del vettore uscente dal contorno σ.*

b) Le formule precedenti sussistono in condizioni assai più generali di quelle enunciate. Proviamo soltanto che esse sussistono se si sostituisce u con $\frac{u}{r}$, oppure u con $\frac{u}{r}$, essendo r

la distanza di un punto (polo) fisso, interno a τ, da un punto qualunque di τ o di σ.

In tal caso, come si vede, la funzione $\frac{u}{r}$ è discontinua nel polo.

Per dimostrare la validità delle formule, ad es. della (1), applichiamo il metodo delle singolarità. Supposto il polo O a distanza finita da σ, si descriva, centro in O, una sfera τ_1 sufficientemente piccola e contenuta tutta in τ; al volume τ', ottenuto escludendo da τ la sfera τ_1, è applicabile la (1). Avremo

$$\int \operatorname{grad} \frac{u}{r} d\tau' = -\int \frac{u}{r} n d\sigma - \int \frac{u}{r} n_1 d\sigma_1,$$

essendo n_1 un vettore unità normale alla superficie σ_1 di τ_1 e rivolto verso τ'. L'integrale del primo membro, col tendere a zero del raggio di τ_1 è convergente, perchè

$$\int \operatorname{grad} \frac{u}{r} d\tau_1$$

tende a zero. Riflettendo poi che se $d\omega$ è l'elemento di superficie sferica concentrica a τ_1 e di raggio uno, si ha $d\sigma = r^2 d\omega$, si vede subito che anche il secondo integrale del secondo membro tende a zero. E perciò la (1) sussiste ancora.

c) Dalle (1), (2), (3) si traggono conseguenze numerosissime.

Si sostituisca in (2) u con rot u; poichè (Par. I, Cap. VI, n. 4)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0$$

risulta subito

$$\int n \times \operatorname{rot} u \, d\sigma = 0. \tag{4}$$

Nella (3) si sostituisca u con grad u; poichè (l. c.)

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$$

risulta

$$\int n \wedge \operatorname{grad} u \, d\sigma = 0. \tag{5}$$

Questi teoremi, a loro volta, valgono in condizioni più generali.

Sostituiamo, p. es., u con $u\varphi(r)$, essendo $\varphi(r)$ una funzione che diventa infinita nel polo O $r=0$. Applicando il solito metodo delle singolarità, troveremo, colla (5), due integrali analoghi a (5): uno esteso alla superficie σ, l'altro alla superficie σ_1 di τ_1: e poichè

$$\operatorname{grad}(u\varphi(r)) = \varphi(r)\operatorname{grad} u + u \operatorname{grad}\varphi(r),$$

quest'ultimo integrale equivale a

$$\varphi(r)\int n_1 \times \operatorname{grad} u\, d\sigma_1 + \int u n_1 \times \operatorname{grad}\varphi(r)\, d\sigma_1;$$

ora il primo di questi integrali è nullo per la stessa (5) applicata a σ_1: il secondo è nullo pure perchè $\operatorname{grad}\varphi(r)$ è normale a σ_1 e quindi parallelo a n_1: perciò $n_1 \times \operatorname{grad}\varphi(r) = 0$. Dunque la (5) è vera in questo caso più generale. Lo stesso può dirsi per la (4) se si sostituisce u con $\varphi(r)u$ [1].

2. **Lemmi e teorema di Green.** — Altre due formule importanti, conosciute col nome di lemmi di Green, sono le seguenti:

$$(6)\qquad \int (\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v + u \operatorname{div}\operatorname{grad} v)\, d\tau = -\int u n \times \operatorname{grad} v\, d\sigma$$

$$(7)\qquad \int (u \operatorname{div}\operatorname{grad} v - v \operatorname{div}\operatorname{grad} u)\, d\tau = -\int (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) \times n\, d\sigma$$

essendo u e v due funzioni di P soggette alle condizioni enunciate nel n. 1. Infatti

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u \operatorname{div}\operatorname{grad} v + \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v$$

(Par. I, Cap. VI, n. 3): integriamo a tutto lo spazio τ: a primo membro applichiamo il teorema (2) della divergenza ed otterremo la (6). Se poi nella (6) scambiamo u con v e sottraghiamo la equazione così ottenuta dalla (6) stessa, otterremo la (7).

[1] Il teorema del gradiente, nella sua forma cartesiana, trovasi in Gauss: *Theoria attractionis corporum*.... (1813), Werke, Bd. V, pp. 1-22; quello della divergenza in Ostrogradsky: *Note sur la théorie de la chaleur* (1828), [Mem. de St. Petersbourg, s. VI, t. 1, (1830), pp. 129-138].

La (6) quindi sussiste ancora se si sostituisce u con $\frac{u}{r}$; mentre la (7) sussiste sempre che u, v siano monodrome, finite, ecc., nel campo che si considera.

Quindi p. es. la (7) non è applicabile al caso in cui $v = \frac{1}{r}$, dove r ha lo stesso significato che nel precedente paragrafo: a meno che il polo sia *esterno* al campo. Per considerare il caso del polo *interno* si ricorre al metodo delle singolarità: riflettendo che

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\operatorname{div} \frac{P-O}{r^3} = -\left(\frac{1}{r^3} \operatorname{div}(P-O) - \frac{3(P-O)^2}{r^5}\right)$$
$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0,$$

che inoltre l'integrale di $\frac{1}{r} \operatorname{div} \operatorname{grad} u \cdot d\tau_1 = \operatorname{div} \operatorname{grad} u \cdot r\, dr\, d\omega$ (cfr. n. 1) esteso al volume τ_1 e l'integrale di $\frac{1}{r} \operatorname{grad} u \times n\, d\sigma_1 = r \operatorname{grad} u \times n\, d\omega$ esteso al contorno σ_1 della piccola sfera che, centro in O, circonda il punto singolare O, tendono a zero col tendere a zero del raggio; e infine $u \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times n\, d\sigma_1 = -\frac{u}{r^2} d\sigma_1 = -u\, d\omega$, esteso a σ, tende a $-4\pi u_0$, si trova subito:

$$(8) \qquad 4\pi u_0 = \int \left(u \operatorname{grad} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad} u\right) \times n\, d\sigma - \int \frac{1}{r} \operatorname{div} \operatorname{grad} u\, d\tau$$

essendo u_0 il valore di u nel polo. Se il polo cade sul contorno, in un punto ordinario, il fattore 4π dev'essere sostituito con 2π. La formula precedente dicesi « *formula di Green* ».

Il prodotto $n \times \operatorname{grad} u$, ché figura nelle formule precedenti ha un significato molto importante che conviene notare.

Sia dn un elemento numerico tale che *per* dP *parallelo ad* n si abbia $dP = n\,dn$; quindi

$$u \times \operatorname{grad} u \cdot dn = \operatorname{grad} u \times dP = du$$

cioè

$$n \times \operatorname{grad} u = \frac{du}{dn}.$$

La ordinaria *derivata di u secondo la normale*, o *derivata normale di u*, $\frac{du}{dn}$, è così espressa *sotto forma assoluta* da $\boldsymbol{n} \times \operatorname{grad} \boldsymbol{u}$. E ciò è importante constatare poichè, nel simbolo tachigrafico $\frac{du}{dn}$, il dn non è suscettibile di definizione assoluta e il simbolo stesso non ha tutte le ordinarie proprietà del corrispondente simbolo leibniziano.

Valendoci poi del simbolo di funzione $_2$ (Par. I, Cap. VI, n. 4) la (8) si potrà scrivere così

$$(8') \qquad 4\pi u_0 = \int \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn} \right) d\sigma - \int \frac{{}_2 u}{r} d\tau.$$

Per un vettore $\boldsymbol{u}$ funzione dei punti P, si ponga

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dn} = \frac{d\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{i}}{dn} \cdot \boldsymbol{i} + \ldots.$$

e

$$\begin{aligned} {}_2{}'\boldsymbol{u} &= {}_2\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{i}) \cdot \boldsymbol{i} + \ldots. \\ &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{i}) \cdot \boldsymbol{i} + \ldots; \end{aligned}$$

dalla (8') ricaveremo subito

$$(8'') \qquad 4\pi \boldsymbol{u}_0 = \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \boldsymbol{u} - \frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{u}}{dn} \right) d\sigma - \int \frac{{}_2\boldsymbol{u}}{r} d\tau \text{ (1)}.$$

3. **Il teorema di Stokes o della circuitazione.** — Siano: s una curva chiusa che supporremo percorsa in un certo senso da un punto P; σ una superficie (diaframma) avente per contorno s; $\boldsymbol{u}$ un vettore funzione dei punti P di s e σ e del quale esiste la rot; $\boldsymbol{n}$ un vettore unità normale a σ e diretto in modo

(1) I lemmi ed il teorema di Green si trovano nella celebre memoria: *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*. Nottingham, 1828.

Il lemma (6), nel caso di $u = r$, trovasi ancora in GAUSS: *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung* u. s. w. (1840) [Gesam. Werk., B. V., pp. 195-242; vedi § 24].

che un osservatore coi piedi in P e la testa in $P + n$, veda percorsa la curva s nel senso destrogiro; si ha

$$(9) \qquad \int_s u \times dP = \int_\sigma n \times \operatorname{rot} u \, d\sigma.$$

L'integrale a primo membro esprime la *circuitazione* del vettore u lungo la curva s; e però il teorema espresso da (9) dicesi *teorema della circuitazione* o di STOKES.

Consideriamo anzitutto una curva piana s, contorno di una area σ (diaframma) pure piana; e tre vettori unità: t, parallelo alla tangente ad s in P e diretto nel senso in cui è percorsa s; n_1, parallelo alla normale ad s, pure in P, e volto verso l'interno di σ; e finalmente il vettore costante $n = t \times n_1$. Si ha subito

$$\int u \times dP = \int u \times t ds;$$

e poichè

$$u \times t = (u \times n) \times n_1 = -(u \times n) \times n_1,$$

risulta

$$\int u \times dP = -\int (u \times n) \times n_1 ds = \int \operatorname{div}(u \times n) d\sigma,$$

avendo trasformato il secondo integrale col teorema (2) della divergenza. Ma

$$\operatorname{div}(u \times n) = n \operatorname{rot} u,$$

dunque è provato, in queste ipotesi, il teorema.

Se ora abbiamo un contorno qualunque s che limita un diaframma σ, possiamo decomporre σ in tante aree mediante curve tracciate su σ; ed è facile vedere che la circuitazione lungo s è eguale alla somma delle circuitazioni lungo i contorni delle aree in cui è stata spezzata σ: e potremo sempre ridurle ad aree elementari che potremo riguardare come piane e con contorni piani. Dunque è vero in generale il teorema [1].

[1] Casi particolari del teorema (9) erano stati considerati da AMPÈRE: *Mémoire sur la théorie mathématiques des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*: Paris, 1826. (2ª édition, 1883).

Il teorema generale fu dato da STOKES come tema proposto nel *Smith's Prize Examinations*, febbraio 1854 [*Mathem. and Physic. Papers*,

a Il teorema 9 permette di fare un'osservazione importantissima relativa a quei campi τ in cui un vettore, funzione dei punti del campo, è tale che

$$\text{rot}\, u = 0.$$

Siano P_0, P_1 due punti di questo campo e congiungiamoli con due curve s_1, s_2 tutte contenute in τ (campo linearmente connesso). Per il contorno chiuso $s = s_1 + s_2$ facciamo passare un diaframma σ. Due casi possono avvenire: il diaframma è tutto contenuto in τ e allora lo spazio τ dicesi *semplicemente connesso o aciclico*: p. es. lo spazio interno o esterno ad una sfera, ad un involucro sferico. Oppure il diaframma non è tutto contenuto in τ e in tal caso lo spazio τ dicesi *più volte connesso o ciclico*: p. es. lo spazio interno o esterno ad un toro: lo spazio interno ad una sfera cui si siano aggiunti dei manichi vuoti: quello interno ad una camera nel cui centro si elevi una o più colonne per sostenere la volta; ecc.

Nel caso di uno spazio aciclico si può applicare la 9: otterremo

$$\int_s u \times dP = 0;$$

cioè, supposte percorse le due curve s_1, s_2 in uno stesso senso,

$$\int_{s_1} u \times dP = \int_{s_2} u \times dP.$$

Ognuno di questi due integrali è dunque una funzione dell'estremo superiore dell'arco, cioè di P_1, ed è indipendente dal cammino che congiunge P_0 con P_1. Si può dunque porre

$$\int_{s_1} u \times dP = v.$$

v. V, pp. 320; e fu ritrovato da HANKEL: *Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flussigkeiten*; Göttingen, 1861.

Le considerazioni riguardo alla monodromia di v, agli spazi ciclici o aciclici sono dovute ad HELMHOLTZ: *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen* [Journal für reine u. ang. Math., B. LV, pp. 25-55 (1858); Wissenschaftliche Abhand. Bd. I].

essendo u una funzione monodroma dei punti di τ. Quindi

$$u \times dP = du = \operatorname{grad} u \times dP,$$
$$u = \operatorname{grad} u;$$

se in uno spazio aciclico si ha $\operatorname{rot} u = 0$, *il vettore* u *è il gradiente di una funzione monodroma dei punti del campo.*

b) Consideriamo ora il secondo caso, in cui cioè lo spazio è ciclico. Com'è noto e come del resto si vede subito, tale spazio, con opportune sezioni, può ridursi aciclico. Se, p. es., si tratta dello spazio interno ad un toro, basterà tracciare una sezione meridiana; se si tratta di una camera con una colonna in mezzo, basterà tracciare una parete dalla colonna ad uno dei muri della camera; ecc.

Sia P_0 un punto infinitamente vicino a questa sezione e partendo da P_0 percorriamo una curva, tutta contenuta nel campo, per modo da giungere al punto P_1 infinitamente vicino a P_0, ma dall'altra parte della sezione o parete. Poscia, mantenendoci vicini alla sezione, percorriamo un cammino P_1Q_1 e da Q_1 facendo un giro, come prima, torniamo a Q_0 infinitamente vicino a Q_1, dall'altra parte della sezione e finalmente torniamo da Q_0 a P_0 con un cammino analogo e infinitamente vicino a P_1Q_1. Il cammino chiuso $P_0P_1Q_1Q_0P_0$, tutto contenuto in τ, è tale che per esso si può far passare un diaframma tutto contenuto in τ. Dunque la circuitazione di u lungo questo cammino è nulla; e poichè le due circuitazioni lungo i tratti P_1Q_1 e Q_0P_0 sono eguali, ma di segno contrario, segue che la circuitazione lungo P_0P_1 deve essere eguale e dello stesso segno della circuitazione lungo Q_0Q_1: e se come nel caso precedente si pone

$$\int_{P_0P_1} u \times dP = u,$$

risulta

$$u(P_1) - u(P_0) = u(Q_1) - u(Q_0);$$

cioè la differenza dei valori della u per due punti appartenenti a τ, infinitamente vicini ad una sezione e situati da parti opposte, è costante per i punti di una stessa sezione. Tale costante è in generale diversa da zero; dunque partendo da P_0 con un certo valore di u, $u(P_0)$, noi torneremo in P_0 con un valore diverso, $u(P_0) + \text{cost.}$, a seconda dei giri che faremo. In

tal caso il vettore u sarà sempre il gradiente di una funzione u, ma questa funzione, in generale, è *polidroma*.

Questo teorema, così precisato, è l'inverso di un teorema dimostrato al Cap. VI, n. 4, della prima parte.

4. Teorema della variazione del flusso. — Il vettore u, oltre che dai punti del campo, dipenda anche da un altro parametro; p. es., dal tempo. Il campo stesso vari col tempo in guisa che un punto P abbia, all'istante t, la velocità v. Consideriamo il flusso che attraversa il diaframma σ, di contorno s, in una direzione normale n.

Dico che la derivata del flusso rispetto al tempo, cioè *la variazione del flusso in una unità di tempo*, è data da

$$(11)\quad \frac{d}{dt}\int n \times u\, d\sigma = \int \left\{ \frac{\partial\, n \times u}{\partial t} + n \times (v \operatorname{div} u + \operatorname{rot} u \times v) \right\} d\sigma .$$

Tale variazione infatti consterà di due parti; la prima si ottiene supponendo σ immobile; essa quindi è data dal primo termine del secondo membro della (11). La seconda parte si otterrà supponendo $n \times u$ invariabile rispetto al tempo, ma variabile invece σ.

Consideriamo lo spostamento di σ nel tempo dt; si formerà un volume τ chiuso da σ_t, σ_{t+dt} e da una superficie laterale σ''.

Pel teorema (2) della divergenza, si ha

$$\int_\tau \operatorname{div} u\, d\tau = -\int_{\sigma_t} n' \times u\, d\sigma + \int_{\sigma_{t+dt}} n' \times u\, d\sigma - \int n'' \times u\, d\sigma'',$$

in cui n', vettore unitario normale a σ, e volto verso l'interno di τ, potrà avere lo stesso verso di n o il verso opposto, secondoche vdt ha il verso di n o l'opposto.

Per elemento $d\tau$ possiamo scegliere il volume generato da $d\sigma$ nel suo movimento e che può assimilarsi ad un prisma di base $d\sigma$ e la cui altezza è la proiezione dello spostamento vdt sulla normale n'; quindi

$$d\tau = n' \times v dt d\sigma .$$

Per elemento $d\sigma''$ possiamo scegliere una striscia infinitamente sottile i cui lati sono: dP sulla curva s contorno di σ e

lo spostamento $v dt$; tale area è espressa dal modulo di $v \wedge dP dt$; e quindi essendo n'' vettore unitario normale a σ'' si ha

$$n'' d\sigma = \pm v \wedge dP \cdot dt,$$

e prenderemo il segno $+$, o il segno $-$, secondo che v ha o no lo stesso senso di n. In ogni caso dunque

$$\int_{\sigma_1} n \times u \, d\sigma - \int_{\sigma_0} n \times u \, d\sigma = dt \left\{ \int_{\sigma} n \times v \operatorname{div} v \, d\sigma + \int_{s} u \times v \wedge dP \right\}.$$

Resta ancora arbitrario il senso di s; scegliamolo in modo che

$$\int_{s} u \times v \wedge dP = \int_{s} dP \times u \wedge v = \int_{\sigma} n \times \operatorname{rot} (u \wedge v) \, d\sigma$$

in virtù della (9). Dividendo per dt e passando al limite per $dt = 0$, si ha la (11), cioè il *teorema della variazione del flusso.*

Se σ è una superficie chiusa, in virtù della (4) sparisce dalla (11) l'ultimo termine: avremo quindi semplicemente

$$(12) \qquad \frac{d}{dt} \int n \times u \, d\sigma = \int \left\{ \frac{\partial (n \times u)}{\partial t} + n \times v \operatorname{div} u \right\} d\sigma.$$

Se invece σ è una superficie qualunque (diaframma) e il vettore u nel campo è tale che

$$\operatorname{div} u = 0,$$

(campo *solenoidale*) si ha

$$(13) \qquad \frac{d}{dt} \int n \times u \, d\sigma = \int \left\{ \frac{\partial (n \times u)}{\partial t} + n \times \operatorname{rot} (u \wedge v) \right\} d\sigma \text{ [1]}.$$

5. **Formule in coordinate cartesiane.** — Le formule precedenti, stabilite in modo del tutto autonomo, sono importantissime e di un uso frequente in tutta la Fisica-matematica.

[1] Questo teorema è dato, forse per la prima volta, da HERTZ: *Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper* [Wiedemann's Annalen, Bd. XLI, p. 369 (1890); Gesamm. Werke, Bd. II, pp. 256-285, Leipzig, 1894].

Se i punti del campo vengono individuati mediante il solito sistema ortogonale i, j, k, e diciamo $u_1 i$, $u_2 j$, $u_3 k$ le componenti del vettore u, le formule (1), (2), (3), (6), (7), (9) ci danno rispettivamente, eguagliando i coefficienti di i, j, k:

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = -\int \cos nx\, u\, d\sigma,$$

$$\int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) d\tau = -\int (u_1 \cos nx + u_2 \cos ny + u_3 \cos nz)\, d\sigma.$$

$$\int \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) d\tau = -\int (u_3 \cos ny - u_2 \cos nz)\, d\sigma.$$

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + u\,\Delta_2 v\right) d\tau = -\int u \frac{dv}{dn}\, d\sigma.$$

$$\int (u\,\Delta_2 v - v\,\Delta_2 u)\, d\tau = -\int \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) d\sigma.$$

$$\int_s (u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz) = \int_\sigma \left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) \cos nx + \ldots\ldots\right\} d\sigma.$$

Dall'ultima poi, supponendo $u_3 = 0$, u_1, u_2 funzioni soltanto di x, y, ed il diaframma coincidente col piano $z = 0$, si deduce l'altra

$$\int (u_1 dx + u_2 dy) = \int \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) d\tau.$$

CAPITOLO III.

Applicazioni alla Meccanica.

1. Velocità e accelerazione di un punto. — *a*) Consideriamo un punto mobile funzione del tempo t, $P(t)$.

Chiamasi *velocità* ed *accelerazione* del punto all'istante t, la derivata prima e seconda di $P(t)$, cioè $P'(t)$ e $P''(t)$, rispetto al tempo t. Se riguardiamo P come funzione dell'arco s di traiettoria del punto mobile, e a sua volta s funzione di t, si ha

$$(1)\qquad \begin{cases} P'(t) = \dfrac{ds}{dt}\,\boldsymbol{t} = v\boldsymbol{t} \\[2ex] P''(t) = \dfrac{dv}{dt}\,\boldsymbol{t} + \dfrac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{n}, \end{cases}$$

come si vide già (II, Cap. I, 2). Quindi la velocità è parallela alla tangente ed ha per modulo il valore assoluto di $\frac{ds}{dt}$. L'accelerazione è parallela al piano osculatore della traiettoria; l'accelerazione tangenziale ha per valore $\frac{dv}{dt}$; quella normale $\frac{v^2}{\rho}$ ed è sempre diretta verso il centro di curvatura.

Se la velocità è costante la traiettoria è rettilinea ed il moto è uniforme.

b) Sia O un punto fisso, $\boldsymbol{a}$ un vettore unità costante: P un punto mobile in un piano condotto per O parallelamente ad $\boldsymbol{a}$. Sarà

$$P - O = re^{i\varphi}\boldsymbol{a},$$

dove r è il modulo di $P - O$: φ l'angolo in radianti tra $P - O$ ed $\boldsymbol{a}$. Derivando:

$$\begin{aligned} P' &= r'e^{i\varphi}\boldsymbol{a} + re^{i\varphi}\varphi' i\boldsymbol{a} \\ &= r'\boldsymbol{R} + r\varphi'\boldsymbol{N}, \end{aligned}$$

essendo

$$R = e^{i\varphi} a, \quad N = i e^{i\varphi} a,$$

due vettori unità rispettivamente parallelo e normale a $P - O$.

Successivamente, poichè

$$R' = \varphi' N; \quad N' = -\varphi' R,$$

risulta

$$P'' = (r'' - r\varphi'^2) R + (2r'\varphi' + r\varphi'') N.$$

Le componenti della velocità secondo il raggio vettore e la normale al raggio vettore sono

$$(2) \qquad r', \quad r\varphi';$$

quelle dell'accelerazione

$$(3) \qquad r'' - r\varphi'^2, \quad 2r'\varphi' + r\varphi'' = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\varphi').$$

2. **Moto centrale.** — La linea d'azione della forza che sollecita un punto mobile P passi costantemente per un punto fisso O: il moto allora dicesi *centrale*. L'accelerazione (proporzionale alla forza) sarà parallela al vettore $P - O$; dunque

$$(P - O) \wedge P'' = 0.$$

Integrando

$$(4) \qquad (P - O) \wedge P' = m,$$

con m vettore costante. Il piano, condotto per P ed O, parallelamente alla velocità P', essendo normale ad un vettore costante, segue che *la traiettoria del mobile è contenuta in un piano passante pel punto fisso.*

Deduciamo ancora, se p è la lunghezza della normale condotta da O sulla tangente alla traiettoria,

$$p\,ds = dt \bmod m = c\,dt; \qquad (c = \bmod m)$$

e quindi, se diciamo dS l'elemento del settore di area descritto dal raggio vettore,

$$(5) \qquad dS = \frac{1}{2} c\,dt;$$

le aree descritte dal raggio vettore a partire dalla sua posizione iniziale crescono proporzionalmente al tempo; $c/2$ è l'area

descritta in una unità di tempo (teorema delle aree). La reciproca è anche vera.

Se l'accelerazione è diretta verso O ed è proporzionale alla distanza, avremo

$$P'' = -k^2 (P - O);$$

integrando si ha

$$P = O + a \cos kt + b \operatorname{sen} kt,$$

a e b essendo due vettori costanti; e precisamente

$$a = P_0 - O = r_0 i; \quad kb = v_0 j,$$

dove i e j sono due vettori unitari rispettivamente paralleli al raggio vettore e alla velocità iniziale; r_0 e v_0 sono le grandezze del raggio vettore e della velocità iniziale. Il punto

$$P = O + r_0 \cos kt i + \frac{v_0}{k} \operatorname{sen} kt j,$$

col variare di t, descrive la traiettoria, che è una ellisse col centro in O e di cui due diametri coniugati, di grandezze r_0 e v_0/k sono paralleli ad i e j. Parimenti si vede subito che l'odografo è pure un'ellisse, ecc.

Supponiamo invece l'accelerazione variabile in ragion inversa del quadrato della distanza: cioè

$$P'' = -\frac{a^2}{r^3}(P - O).$$

Moltiplichiamo vettorialmente questa equazione per il vettore m, dato dalla (4); avremo

$$P'' \wedge m = P'' \wedge [(P - O) \wedge P'] = \frac{a^2}{r^2}[rP' - r'(P - O)] = a^2 \frac{d}{dt}\frac{P - O}{r}$$

in virtù del teorema sul duplice prodotto vettoriale. Integrando

$$\frac{P \wedge m}{a^2} = \frac{P - O}{r} + \varepsilon n, \tag{6}$$

dove ε è una costante (numero), n un vettore unità costante. Se

ora moltiplichiamo scalarmente questa eguaglianza per $P - O$ otterremo

$$\frac{(P - O) \times P') \cdot m}{a^2} = \frac{m \times (P - O) \cdot P'}{a^2} = \frac{m^2}{a^2} = p$$
$$= r + \varepsilon m \times (P - O) = r + \varepsilon r \cos(r, n),$$

essendo p una costante: e questa ci dà

$$p = r \cdot (1 + \varepsilon \cos(r, n))$$

cioè l'equazione di una conica (traiettoria) riferita al fuoco.

Moltiplichiamo invece la stessa equazione (6) vettorialmente per m: otterremo

$$\frac{m \times (P' \times m)}{a^2} = \frac{m \times (P - O)}{r} + \varepsilon m \times n.$$

Il primo membro si trasferma in

$$\frac{m^2}{a^2} P' - \frac{m \times P'}{a^2} m = pP',$$

essendo $m \times P' = 0$ per la (4). Ma, sempre per la (4), si può porre

$$m \times (P - O) = bi(P - O) = bire^{i\varepsilon} l,$$

perchè $m \times (P - O) = 0$; $b = \text{mod}\, m$ è una costante, l un altro vettore unitario costante. Quindi

$$P' = \frac{1}{p} bie^{i\varepsilon} l + \frac{1}{p} \varepsilon m \times n;$$

l'odografo è un cerchio di raggio $\frac{1}{p} b = \frac{a^2}{\text{mod}\, m}$.

Nel moto centrale, P' è parallela a $P - O$ e alla tangente dell'odografo: *le tangenti all'odografo sono parallele ai raggi vettori della traiettoria.*

Si può assegnare facilmente il raggio di curvatuta dell'odrografo.

Infatti dalla seconda delle (3), o anche dalla (5) si deduce

$$(7) \qquad r^2 \frac{d\varepsilon}{dt} = c;$$

ma se ρ' è il raggio richiesto si ha

$$\rho' = \frac{ds'}{d\varphi} = \frac{r^2}{c} v', \quad \left(v' = \frac{ds'}{dt}\right).$$

Se Q è il punto che descrive l'odrografo, allora

$$Q' = P'';$$

si ha quindi

$$v' = \text{mod } Q' = \text{mod } P'';$$

e infine

$$\rho' = \frac{r^2}{c} \text{ mod } P''.$$

Se, in particolare, mod $P'' = \frac{a^2}{r^2}$ (come nel caso precedentemente trattato), risulta

$$\rho' = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\text{mod } m} = \text{cost.},$$

l'odografo cioè è un cerchio.

Se la grandezza dell'accelerazione (o della forza) che sollecita il punto mobile, è funzione della sola distanza di P dal centro fisso, si ha:

$$P'' = f(r) \frac{P - O}{r} = f(r) \text{ grad } r = \text{grad} \int f(r) dr:$$

cioè *la forza* (supposta eguale ad 1 la massa) *è derivabile da un potenziale*

$$\varphi(r) = \int f(r) dr.$$

Moltiplicando scalarmente per dP si deduce

$$P'' \times dP = \text{grad } \varphi(r) \times dP = d\varphi(r);$$

ma

$$dP'^2 = 2P' \times dP' = 2P' \times P'' dt = 2P'' \times dP;$$

dunque integrando si ha

$$P'^2 = h + 2\varphi(r) \tag{8}$$

(*integrale delle forze vive*). Colla (8) e la (7) il problema della

determinazione del moto prodotto da forze centrali derivabili da un potenziale, si riduce agevolmente alle quadrature.

3. **Formule fondamentali per la cinematica di un corpo rigido.** — *a*) Se P ed O sono due punti qualunque di un corpo rigido, allora esiste un vettore Ω, funzione del tempo, per il quale si ha

$$P' = O' + \Omega \wedge (P - O). \tag{9}$$

Infatti, se i, j, k è la solita terna destrogira di vettori paralleli a tre direzioni ortogonali uscenti da O e rigidamente connesse col corpo in moto; ed accenniamo con i' la derivata di i rispetto al tempo; si ha identicamente:

$$i' = (i' \times i)i + (i' \times j)j + (i' \times k)k.$$

Ma dalle $i^2 = 1$, $i \times k = 0$, deduciamo

$$i' \times i = 0; \quad i' \times k = -i \times k';$$

e ricordando che $i \wedge i = 0$, $k \wedge i = j$, $j \wedge i = -k$, possiamo scrivere

$$i' = (j' \times k)i \wedge i + (k' \times i)j \wedge i + (i' \times j)k \wedge i,$$

ossia

$$i' = \Omega \wedge i$$

avendo posto

$$\Omega = (j' \times k)i + (k' \times i)j + (i' \times j)k.$$

Il vettore Ω non varia per una permutazione ciclica dei tre vettori; quindi si otterrà ancora

$$j' = \Omega \wedge j, \quad k' = \Omega \wedge k.$$

Ma ogni vettore $P - O$, essendo P un altro punto del corpo, è una funzione lineare di i, j, k con coefficienti costanti: dunque sarà pure

$$P' - O' = \Omega \wedge (P - O)$$

che appunto dimostra la (9).

La (9) mette subito in evidenza la decomposizione del movimento istantaneo del corpo in altri due simultanei; uno di

traslazione di velocità O'; l'altro di *rotazione* intorno ad un asse passante per O e parallelo ad Ω e la cui velocità angolare è mod Ω.

Se $P - O$ è parallelo ad Ω, risulterà $P'' = O''$; dunque *i punti di rette parallele ad* Ω *hanno la stessa velocità.*

Si voglia determinare un punto la cui velocita sia parallela ad Ω. Moltiplichiamo per cio la (9) vettorialmente per Ω e sviluppiamo il secondo membro col teorema del duplice prodotto vettoriale; si ha

$$P'' \wedge \Omega = O'' \wedge \Omega + \Omega^2 (P - O) - (P - O) \times \Omega \cdot \Omega.$$

Perchè il primo membro sia nullo basta che

$$P - O = \frac{1}{\Omega^2} O'' \wedge \Omega.$$

Se pel punto P così determinato si conduce la parallela ad Ω, avremo l'asse istantaneo di moto elicoidale o asse di Mozzi [1].

È agevole trovare un notevole significato per Ω. Infatti lasciando invariato il tempo, diamo al solo punto P due spostamenti distinti che accenneremo con dP e δP. Avremo da (9)

$$dP'' = \Omega \wedge dP; \quad \delta P'' = \Omega \wedge \delta P;$$

e da queste due:

$$dP'' \times \delta P - \delta P'' \times dP = \Omega \wedge dP \times \delta P - \Omega \wedge \delta P \times dP = 2\Omega \times dP \wedge \delta P.$$

Il primo membro, per definizione, è (Par. I. Cap. VI, 3)

$$\text{rot } P'' \times dP \wedge \delta P;$$

dunque

$$\text{rot } P'' = 2\Omega.$$

b) Dalla stessa formula (9) possiamo dedurre la formula che dà l'accelerazione di P. Deriviamola infatti rispetto a t. Si ha

$$P''' = O''' + \Omega' \wedge (P - O) + \Omega \wedge (P' - O').$$

[1] Dal nome del suo primo scopritore Giulio Mozzi (1730-1813): *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi.* Napoli 1763.

Il terzo termine del secondo membro si può trasformare così

$$\Omega \times (P - O') = \Omega \times (\Omega \times (P - O)) = \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 (P - O).$$

Poniamo

$$2\varphi = (\Omega \times (P - O))^2 - \Omega^2 (P - O)^2 = (\Omega \times (P - O))^2$$

e riguardiamo φ funzione del punto P. Sarà

$$d\varphi = \operatorname{grad} \varphi \times dP = (\Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 (P - O)) \times dP$$

e quindi

$$\operatorname{grad} \varphi = \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 (P - O).$$

L'accelerazione di P è dunque data da

$$P'' = O'' + \Omega' \times (P - O) + \operatorname{grad} \varphi. \tag{12}$$

c) Nel caso speciale, così notevole per lo studio delle curve gobbe, che il sistema rigido sia costituito dai punti rigidamente connessi con la tangente, normale e binormale in un punto O di una curva gobba, se nella (9) si pone in luogo di $P - O$ una volta t e un'altra volta b, si riflette che (Par. II, Cap. I, 2, form. 3)

$$O' = vt; \quad \frac{dt}{dt} = \frac{v}{\rho} n; \quad \frac{db}{dt} = \frac{v}{\tau} n,$$

si avrà

$$\frac{v}{\rho} n = \Omega \times t; \quad \frac{v}{\tau} n = \Omega \times b$$

e quindi

$$\Omega \times n = 0;$$

e poscia agevolmente

$$\Omega = v\left(\frac{b}{\rho} - \frac{t}{\tau}\right).$$

L'asse di moto elicoidale è definito dalla

$$vt + \Omega \times (P - O) = h\Omega.$$

Si può soddisfare a questa ponendo

$$P - O = kn;$$

e si dedurrà subito

$$1 - \frac{k}{\rho} = -\frac{h}{\tau}; \quad \frac{k}{\tau} = \frac{h}{\rho}$$

e infine

$$k = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) = \rho;$$

cioè *l'asse di moto elicoidale taglia ortogonalmente la normale principale ad una distanza da O eguale a k.*

4. **Moto di una figura piana nel proprio piano.** — Dalla (9) risulta subito che qualunque siano i punti P e Q di una figura piana mobile nel proprio piano, esiste per ogni valore di t un numero reale ω (il mod Ω) tale che

$$P' = Q' + \omega i (P - Q). \tag{13}$$

Essa è una conseguenza immediata della (9). Ma può anche provarsi direttamente, osservando che se P_0 e Q_0 sono due punti in una posizione della figura mobile; P, Q i loro corrispondenti in un'altra posizione, si ha

$$P - Q = e^{i\varphi}(P_0 - Q_0).$$

Derivando rispetto al tempo:

$$P' - Q' = \varphi' e^{i\varphi} i (P_0 - Q_0) = \varphi' \cdot i (P - Q);$$

onde posto $\varphi' = \omega$ risulta la (13).

Per $\omega \neq 0$ avremo

$$P + \frac{1}{\omega} i P' = Q + \frac{1}{\omega} i Q' = C,$$

ed il punto C, funzione di t, è indipendente dal punto speciale P.

Quindi

$$P' = \omega i (P - C); \tag{14}$$

la quale mette subito in evidenza che *all'istante t il moto della figura piana è una rotazione intorno a C: ω è la velocità istantanea di rotazione; le traiettorie dei punti della figura piana hanno le normali passanti per C (centro istantaneo di rotazione).*

Dalla (13) a sua volta si ricava un'altra formula importante. Derivando rispetto al tempo si ha

$$P'' = Q'' + \omega' i (P - Q) + \omega i (P' - Q')$$
$$= Q'' + (\omega' i - \omega^2)(P - Q).$$

Ora poniamo

$$\omega' i - \omega^2 = \rho e^{i\theta}$$

e risulterà

$$P'' = Q'' + \rho e^{i\theta}(P - Q)$$

del tutto analoga alla (13).

Da questa equazione si deduce

$$P - \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} P'' = Q - \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} Q'' = O$$

essendo O (come C) funzione di t, ma indipendente dal punto speciale P da cui siamo partiti: O dicesi *centro delle accelerazioni,* ed avremo la formula

$$P'' = \rho e^{i\theta}(P - O) \tag{15}$$

analoga alla (14), e da cui si deducono numerose proprietà.

Se mod $P'' =$ cost., risulta ancora mod $(P - O) =$ cost.: cioè *i punti che all'istante t hanno accelerazione di grandezza costante, stanno su cerchi aventi il centro nel centro delle accelerazioni.*

La (15) poi permette la costruzione del vettore P'' cognito il punto O. Derivando invece la (14) avremmo trovato ancora la (15), ma con

$$O = C + \frac{\omega}{\rho} e^{i\theta} i C'$$

che dà la dipendenza tra O ed il punto C.

Se p. es. la velocità angolare è costante (ciò che può supporsi nella descrizione puramente geometrica delle figure piane), essendo $\omega' = 0$ si ha

$$\rho e^{i\theta} = -\omega^2;$$

onde

$$O = C_1 = C - \frac{1}{\omega} i C';$$

cioè il punto C_1, che dicesi *centro geometrico delle accelerazioni,* cade su di una retta normale a C' e dista da C di $-\frac{\text{mod } C'}{\omega}$.

In tal caso

$$P'' = \omega^2 (C_1 - P)$$

cioè l'accelerazione è parallela al vettore $C_1 - P$; ecc.

Il punto $P(u, t)$, funzione di u e di t, sia tale che per $u =$ cost. si abbia, per ogni t,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \omega i (P - C).$$

Tale punto, per $t =$ cost., descrive, col variare di u, una linea σ, e questa, variando t, si muove rigidamente nel piano: quindi, per $u =$ cost., si otterranno le *traiettorie* dei suoi punti.

L'inviluppo di σ è una linea σ_1 e il punto che la descrive si ottiene ricavando u dalla

$$\frac{\partial P}{\partial t} \times i \frac{\partial P}{\partial u} = 0$$

e sostituendo in $P(u, t)$; quindi: *i punti di σ_1 sono i piedi delle normali condotte da C su σ.*

Il punto P sia comune a σ e σ_1; gli spostamenti infinitesimi di P su σ e σ_1 sono

$$\frac{\partial P}{\partial u} du, \quad \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial t} dt:$$

tali spostamenti sono paralleli e quindi se diciamo ds e ds_1 gli elementi lineari di σ e σ_1 si ha

$$ds - ds_1 = \pm \operatorname{mod} \frac{\partial P}{\partial t} dt = \pm \omega \operatorname{mod} (P - C) \cdot dt:$$

od anche

$$\frac{ds}{dt} - \frac{ds_1}{dt} = \frac{d(s - s_1)}{dt} = \pm \omega \operatorname{mod} (P - C) \neq 0:$$

quindi σ rotola e scivola su σ_1, la velocità di *scivolamento* essendo $\pm \sigma \operatorname{mod} (P - C)$.

All'istante t_0 diciamo P_0, Q_0,.... gli elementi che all'istante t sono P, Q,... I vettori $P - Q$, $P_0 - Q_0$, per la rigidità della figura, avendo eguale modulo, si può porre:

$$P - Q = e^{i\vartheta} (P_0 - Q_0)$$

con θ funzione di t. Derivando rispetto al tempo si ha

$$P' - Q' = \theta' e^{i\theta} i (P_0 - Q_0) = \theta' i (P - Q);$$

e questa, paragonata con la (13), ci dà

$$\theta' = \omega.$$

Posto adunque

$$\varphi = \int_0^t \omega dt$$

risulta

$$P - Q = e^{i(\varphi - \varphi_0)} (P_0 - Q_0);$$

la rotazione $\varphi - \varphi_0$ colla quale dalla configurazione t_0 si passa a quella relativa all'istante t, è la somma delle rotazioni istantanee nell'intervallo fra t_0 e t.

Il punto $H(t_0, t)$ funzione di t_0 e t coincida con C all'istante t. Allora la equazione precedente ci dà

$$P - C = e^{i(\varphi - \varphi_0)} (P_0 - H_0)$$

oppure

$$H = P_0 - e^{-i(\varphi - \varphi_0)} (P - C).$$

Derivando rispetto a t_0 e t si trova

$$\frac{\partial H}{\partial t_0} = \omega_0 i (P_0 - C_0) - e^{-i(\varphi - \varphi_0)} \omega_0 i (P - C) = \omega_0 i (H - C)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = e^{-i(\varphi - \varphi_0)} \omega i (P - C) - e^{-i(\varphi - \varphi_0)} (P - C') = e^{-i(\varphi - \varphi_0)} C'.$$

Dalla prima si deduce che, per t = cost., H descrive una linea che diremo Γ: mentre per t variabile e t costante si hanno le traiettorie dei punti di Γ: tale linea è il luogo dei centri di istantanea rotazione sul piano mobile, cioè il luogo dei punti della figura mobile che diventano centri istantanei di rotazione. Il luogo del punto C sul piano fisso è una curva Γ_1 tangente alla prima: gli archi che vengono a contatto sono eguali: cioè Γ_1 è l'inviluppo delle posizioni di Γ e la velocità di scivolamento è nulla.

Inoltre H passa per C con velocità nulla, perchè all'istante t è $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$; cioè Γ è il luogo delle cuspidi delle traiettorie [1].

5. **Curve funicolari.** — Un calcolo semplice e diretto, oppure l'applicazione del principio generale dei lavori virtuali, dà per l'equazione indefinita di un filo flessibile e inestensibile la seguente

$$f + \frac{d(\tau t)}{ds} = 0 \tag{16}$$

oppure

$$f + t\frac{d\tau}{ds} + \frac{\tau}{\rho} n = 0; \tag{17}$$

in cui f è il *vettore della forza* nel punto P, τ la grandezza della tensione. È da notare che la forza che sollecita un elemento d'arco ds intorno a P ha la direzione di f e per grandezza mod $f \cdot ds$.

Se f è *parallelo ad una retta fissa*, la curva di equilibrio è contenuta in un piano parallelo a tale retta; inoltre se j è un vettore unità costante normale alla direzione di f, dalla (16), moltiplicando scalarmente per j, si deduce

$$\frac{d}{ds}(\tau t \times j) = 0$$

cioè

$$\tau t \times j = \text{cost};$$

è costante la proiezione della tensione su di una retta normale alla direzione fissa. La relazione trovata è un integrale primo delle equazioni di equilibrio.

Se la linea di azione della forza passa per un punto fisso O, se cioè $P - O$ è parallelo ad f, si deduce

$$(P - O) \times \frac{d(\tau t)}{ds} = \frac{d}{ds}(\tau t \times (P - O)) = 0$$

[1] In questa trattazione si è evitato l'uso dei moti relativi. Vedansi le note di Burali-Forti [Acc. Torino, v. 37 (1902) e v. 47 (1911)]; e: *I moti relativi nel calcolo assoluto* [Rend. Lincei, s. 5, v. 26 (1° sem. 1917) pp. 632-637].

e quindi

$$\tau t \wedge (P - O) = m;$$

la curva di equilibrio è contenuta in un piano passante pel punto fisso, ecc.

Dalla (17) deduciamo poi che

$$f \times dP + d\tau = 0;$$

se quindi f *è derivabile da un potenziale* U, cioè se

$$f = -\operatorname{grad} U,$$

si deduce

$$-\operatorname{grad} U \times dP + d\tau = -dU + d\tau = 0$$

e quindi

$$U + h = \tau$$

che è pure un integrale primo delle equazioni di equilibrio.

Se p. es. f è costante ed eguale a $-ai$ (a costante, i vettore unitario cost.) si ha

$$f = -ai = -\operatorname{grad} az,$$

essendo z la distanza di P da un piano normale ad i. Quindi si ha $U = az$; l'integrale precedente ci dà

$$\tau = h + az = a\left(\frac{h}{a} + z\right) = az_1,$$

in cui si è chiamata z_1 la distanza $\frac{h}{a} + z$. Sempre dalla (17) ricaveremo

$$i = t\frac{dz_1}{ds} + n\frac{z_1}{\rho};$$

la quale dice che la componente del vettore unità n su i è $\frac{z_1}{\rho}$. La componente di un vettore di grandezza N parallelo alla n, cioè alla normale geometrica, è da un lato z_1 e dall'altro $N\frac{z_1}{\rho}$; dunque $N = \rho$. Tale proprietà, com'è noto, caratterizza la catenaria. *La curva di equilibrio, per una forza costante, è dunque una catenaria il cui asse è parallelo alla direzione della forza.*

6. Moto di un corpo rigido. — Vediamo anzitutto alcune notevoli espressioni dell'energia cinetica.

Abbiamo

$$2T = \Sigma m P'^2 = \Sigma m P' \times P'; \tag{18}$$

e valendoci della (9)

$$\begin{aligned} 2T &= \Sigma m P' \times O' + \Sigma m P' \times \Omega \wedge (P - O) \\ &= O' \times \Sigma m P' + \Omega \times \Sigma m (P - O) \wedge P'. \end{aligned}$$

Se quindi diciamo $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{M}$ la *risultante* e l'*asse momento* dell'impulso rispetto al punto O, cioè poniamo

$$\boldsymbol{R} = \Sigma m P', \quad \boldsymbol{M} = \Sigma m (P - O) \wedge P', \tag{19}$$

risulta

$$2T = O' \times \boldsymbol{R} + \Omega \times \boldsymbol{M}. \tag{20}$$

A lor volta $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{M}$ sono funzioni lineari di O' e Ω.

Abbiamo ancora

$$\begin{aligned} 2T &= \Sigma m \{ O' + \Omega \wedge (P - O) \}^2 \\ &= O'^2 \Sigma m + \Sigma m [\Omega \wedge (P - O)]^2 + 2O' \times \Omega \wedge \Sigma m (P - O). \end{aligned}$$

Ora ricordiamo che $\dfrac{\operatorname{mod} [\Omega \wedge (P - O)]}{\operatorname{mod} \Omega}$ è la distanza del punto P dalla retta per O e $O + \Omega$; se la diciamo r e indichiamo con ω il $\operatorname{mod} \Omega$, si deduce che il secondo termine dell'eguaglianza precedente vale

$$\omega^2 \Sigma m r^2 = \omega^2 I$$

essendo I il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta per O e $O + \Omega$. Se finalmente G è il baricentro dei punti P di massa m, si ha

$$(G - O) \Sigma m = \Sigma m (P - O).$$

Dunque:

$$2T = O'^2 \Sigma m + I\omega^2 + 2O' \times \Omega \wedge (G - O) \Sigma m. \tag{21}$$

Calcoliamo l'incremento dT della forza viva nel moto istantaneo durante il tempo dt. Differenziando la (18) si ha

$$dT = \Sigma m P' \times dP';$$

tenendo presente che $P' = O' + \Omega \wedge (P - O)$, da cui

$$dP' = dO' + d\Omega \wedge (P - O) + \Omega \wedge (dP - dO),$$

ed inoltre osservando che $dP = P'dt$ è parallelo a P', si ha facilmente la prima delle formule seguenti:

$$(22) \qquad \begin{aligned} dT &= \boldsymbol{R} \times dO' + \boldsymbol{M} \times d\Omega + \Omega \wedge \boldsymbol{R} \times dO, \\ &= O' \times d\boldsymbol{R} + \Omega \times d\boldsymbol{M} - \Omega \wedge \boldsymbol{R} \times dO, \end{aligned}$$

la seconda ottenendosi dalla prima e dalla (20) differenziata [1].

Se, invece, non teniamo conto del moto istantaneo dei punti del corpo rigido, ma facciamo variare infinitamente poco *soltanto* le *velocità* (cioè l'*impulso*), allora dalla (22) si ha:

$$(22') \qquad dT = \boldsymbol{R} \times dO' + \boldsymbol{M} \times d\Omega = O' \times d\boldsymbol{R} + \Omega \times d\boldsymbol{M},$$

perchè, nell'ipotesi fatta, dO è nullo.

Se rispetto ad una terna connessa col corpo rigido e avente centro in O diciamo u, v, w le componenti di O'; p, q, r quelle di Ω, risulta dalla (21) che: *$2T$ è una funzione quadratica omogenea, a coefficienti costanti, delle u, v, w, p, q, r, cioè delle coordinate del moto istantaneo.*

E dalla (22): *le coordinate del moto istantaneo (o dell'impulso sono le derivate dell'energia cinetica rispetto alle coordinate dell'impulso (o del moto istantaneo).*

Per trovare le equazioni generali del moto ci varremo dei teoremi dell'impulso, i quali dicono che rispetto ad un punto fisso O_1

$$(23) \qquad \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{R}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{M}'}{dt} = \boldsymbol{M}_1'$$

essendo $\boldsymbol{R}_1$ la risultante delle forze ed $\boldsymbol{M}_1'$ l'asse momento delle forze esterne relativo al punto fisso O_1; $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{M}'$ il vettore e l'asse momento dell'impulso, sempre pel punto O_1.

Accennando gli stessi elementi relativi ad un altro punto O colle stesse lettere senza apice, sappiamo che

$$\Sigma m (P - O_1) \wedge P' = \Sigma m (P - O) \wedge P' + \Sigma m (O - O_1) \wedge P$$

cioè

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + (O - O_1) \wedge \boldsymbol{R}$$

[1] C. Burali-Forti e T. Boggio, *Meccanica razionale*, pp. 285-287 (Collezione Lattes, 1921).

e così

$$M_e' = M_e + (O - O_1) \wedge R_e.$$

Allora le (23) ci dànno:

$$\frac{dR}{dt} = R_e; \quad \frac{d}{dt}(M + (O - O_1) \wedge R) = M_e + (O - O_1) \wedge R_e.$$

Sviluppando questa seconda si ha, tenuto conto della prima, il sistema seguente:

$$\frac{dR}{dt} = R_e; \quad \frac{dM}{dt} + \frac{dO}{dt} \wedge R = M_e. \tag{24}$$

Supponiamo p. es. che il corpo abbia un punto fisso O; la reazione del punto fisso figurerà soltanto nella prima delle (24) e non già nella seconda che si riduce a

$$\frac{dM}{dt} = M_e. \tag{25}$$

Riferiamo il corpo ad una terna i, j, k connessa col corpo e poniamo

$$M = P_1 i + Q_1 j + R_1 k; \quad M_e = M_x i + M_y j + M_z k,$$

ed osserviamo che nella derivazione occorre considerare i,..... come funzioni del tempo. Quindi

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dP_1}{dt} i + \ldots\ldots + P_1 i' + \ldots\ldots$$

Ora se nella (9) si pone $P - O = i$, ecc. si deduce

$$i' = \Omega \wedge i, \text{ ecc.}$$

quindi

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dP_1}{dt} i + \ldots\ldots + \Omega \wedge M.$$

Sostituendo nella (25) ed eguagliando i coefficienti di i,..... si ha il sistema

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dP_1}{dt} + qR_1 - rQ_1 = M_x \\ &\frac{dQ_1}{dt} + rP_1 - pR_1 = M_y \\ &\frac{dR_1}{dt} + pQ_1 - qP_1 = M_z. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

L'energia cinetica in tal caso è data dalla (20) o (21) che si riducono a

$$2T = \Omega \cdot \boldsymbol{M} = I\omega^2.$$

Riferendo il corpo ai suoi assi principali d'inerzia e notando che

$$P_1 = \frac{\partial T}{\partial p}, \text{ ecc.}$$

le (26) si riducono alle equazioni di EULER.

Nel caso classico del corpo non soggetto a forze, oppure del corpo pesante sospeso pel suo centro di massa, si ha $\boldsymbol{M}_0 = 0$; la (25) dà subito

$$\boldsymbol{M} = \text{cost.}:$$

l'asse momento dell'impulso è costante.

Applicando lo stesso procedimento al caso generale delle (24): posto

$$\boldsymbol{R}_0 = R_0\boldsymbol{i} + R_0\boldsymbol{j} + R_0\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{R} = U\boldsymbol{i} + V\boldsymbol{j} + W\boldsymbol{k}$$

e dette u, v, w le componenti di O': si ha

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dU}{dt} + Wq - Vr = R_0 \\ \dfrac{dV}{dt} + Ur - Wp = R_0 \\ \dfrac{dW}{dt} + Vp - Uq = R_0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dP_1}{dt} + R_1 q - Q_1 r + Wv - Vw = M \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

dove

$$U = \frac{\partial T}{\partial u}, \quad V = \frac{\partial T}{\partial v}, \quad W = \frac{\partial T}{\partial w},$$

$$P_1 = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad Q_1 = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad R_1 = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

CAPITOLO IV.

Applicazioni all'Idromeccanica.

1. **Equazioni di equilibrio e del moto.** — Per azione delle forze F di massa (riferite all'unità di massa): della pressione p (intensità), normale a qualsiasi superficie σ tracciata nell'interno di un fluido di densità ρ, e che racchiude il volume τ, il fluido è in equilibrio. Per uno dei postulati della statica, l'equilibrio dovendo sussistere se si suppone irrigidito tutto il sistema, dovremo avere

$$\int \rho F d\tau + \int p n d\sigma = 0,$$

in cui n è il solito vettore unità parallelo alla normale a σ e volto verso l'interno di τ. Trasformando il secondo integrale col teorema del gradiente (Par. II, Cap. II, n. 1), si ha

$$\int (\rho F - \operatorname{grad} p \, d\tau = 0;$$

e questa, dovendo sussistere qualunque sia τ, dà luogo alla equazione indefinita dell'equilibrio

$$\rho F - \operatorname{grad} p = 0. \tag{1}$$

L'equazione dei momenti è soddisfatta identicamente.

Col principio di d'Alembert si passa subito all'equazione del moto; infatti la forza d'inerzia, riferita all'unità di volume è espressa da

$$\rho P' = \rho \frac{dP'}{dt} = \rho \frac{dv}{dt};$$

in cui ora accenneremo indifferentemente con P o con v la velocità di un elemento fluido. Avremo quindi

$$\rho\left(F - \frac{dv}{dt}\right) - \operatorname{grad} p = 0;$$

oppure

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{2}$$

Per ottenere l'equazione di continuità, esprimiamo in due modi diversi la quantità di fluido che esce o entra in τ (attraverso σ) nell'unità di tempo e si trova

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \int \rho v \times n d\sigma;$$

al secondo membro applichiamo il teorema della divergenza; avremo

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v)\right) d\tau = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{3}$$

che è una prima forma dell'*equazione di continuità*. Sviluppando il secondo termine (Par. I, Cap. VI, n. 3, form. 6) si ha pure

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} v + v \times \operatorname{grad} \rho = 0.$$

Ora ρ è una funzione numerica dipendente da P e da t; il suo differenziale, quando varia P e resta invariato t, è espresso da

$$\operatorname{grad} \rho \times dP = \operatorname{grad} \rho \times v dt;$$

quindi la derivata totale di ρ (quando variano P e t) è

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \times v;$$

la equazione di continuità può dunque scriversi

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0. \tag{4}$$

Passiamo ora ad un'altra forma delle equazioni del moto e dimostriamo una formula preliminare.

Se u è un vettore funzione del punto P si ha

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

$$\text{rot}\, u = \text{grad}\, u_1 \wedge i + \ldots\ldots$$

$$(\text{rot}\, u) \wedge u = \text{grad}\, u_1 \times u \cdot i + \ldots\ldots = [i \times u \cdot \text{grad}\, u_1 + \ldots\ldots].$$

La parte entro parentesi, del secondo membro, equivale a

$$u_1\, \text{grad}\, u_1 + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\, \text{grad}\, u_1^2 + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\, \text{grad}\, (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = \frac{1}{2}\, \text{grad}\, u^2 :$$

e però

$$\text{grad}\, u_1 \times u \cdot i + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\, \text{grad}\, u^2 + (\text{rot}\, u) \wedge u.$$

Facciamo in questa

$$u = v = \frac{dP}{dt} :$$

il primo membro diventa

$$\text{grad}\, u_1 \times \frac{dP}{dt} \cdot i + \ldots\ldots = \frac{i\,du_1 + j\,du_2 + k\,du_3}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} :$$

esprime cioè la derivata di v, quando si pensi variabile il solo punto P.

Si conclude adunque che la derivata totale di v è espressa da

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\, \text{grad}\, v^2 + (\text{rot}\, v) \wedge v :$$

che è appunto la formula che volevamo stabilire [1]. Con questa la (2) diventa

$$(5) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\, \text{grad}\, v^2 + (\text{rot}\, v) \wedge v = F - \frac{1}{\rho}\, \text{grad}\, p.$$

[1] Potendo far uso delle *omografie* e delle *derivate rispetto ad un punto* [cfr. *Analyse vectorielle générale*, l. c.] questa formula si ottiene direttamente senza introdurre le coordinate di u.

2. **Moto vorticoso. Potenziale di velocità.** — Supponiamo il fluido incompressibile e quindi $\rho = \text{cost.}$; oppure supponiamo che p e ρ siano legati da una relazione (legge di BOYLE e GAY-LUSSAC pei fluidi perfetti), tale che permetta di porre

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \Pi.$$

Poniamo inoltre

$$2\Omega = \operatorname{rot} P' = \operatorname{rot} v; \tag{6}$$

il vettore Ω dicesi *rotazione*, o anche *vortice*, dell'elemento fluido P all'istante t.

Riguarderemo inoltre come variabili indipendenti il punto P (o le coordinate che fissano la posizione di P) ed il tempo t; di guisa che è possibile la inversione dei simboli di operazione $\frac{\partial}{\partial t}$ e rot. Ciò posto prendiamo la rot della (5), e si avrà subito

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{rot}(\Omega \wedge v) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} F. \tag{7}$$

Consideriamo ora tracciata nel fluido una curva chiusa s e per essa un diaframma σ; moltiplichiamo la (7) scalarmente per n (vettore unità normale a σ) e integriamo a tutto σ. Risulterà

$$\int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{rot}(\Omega \wedge v) \right) \times n d\sigma = \frac{1}{2} \int \operatorname{rot} F \times n d\sigma.$$

Al secondo membro possiamo applicare subito il teorema di STOKES; al primo si può invece applicare quello della variazione del flusso: e se riflettiamo che

$$\operatorname{div} \Omega = \operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0,$$

tale teorema può scriversi

$$\frac{d}{dt} \int_\sigma \Omega \times n d\sigma = \int_\sigma \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \times n + n \times \operatorname{rot}(\Omega \wedge v) \right) d\sigma.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} \int_\sigma \Omega \times n d\sigma = \frac{1}{2} \int_s F \times dP. \tag{8}$$

Ammettiamo ancora che *le forze di massa derivino da un potenziale* U monodromo, ecc.; poichè in tal caso

$$F = -\operatorname{grad} U,$$

si ha

$$\int_s F \times dP = -\int_s \operatorname{grad} U \times dP = -\int_s dU = 0;$$

e quindi la (8) ci dà

$$\int_\sigma \Omega \times n\, d\sigma = \text{cost.} = c. \tag{9}$$

Applichiamo ancora il teorema di STOKES e otterremo

$$\int_s v \times dP = \frac{1}{2} c; \tag{10}$$

se le forze derivano da un potenziale, la circuitazione della velocità lungo una qualunque curva chiusa s tracciata nel fluido, è costante durante il moto.

a) In un determinato istante sia

$$\operatorname{rot} v = 0$$

cioè

$$\Omega = 0.$$

Per la (9) sarà $c = 0$ in quell'istante e quindi sempre nulla; allora dalla (10), con un ragionamento già fatto, si deduce che, per qualunque valore di t, è

$$v = \operatorname{grad} \varphi \tag{11}$$

(φ essendo funzione monodroma o polidroma) e quindi sarà sempre $\Omega = 0$; cioè *se la rotazione è nulla in un determinato istante, sarà nulla sempre;* oppure: *se in un determinato istante esiste un potenziale di velocità, cioè sussiste la* (11), *tale potenziale sussisterà sempre* (Teorema di LAGRANGE).

In tal caso il moto del fluido dicesi *irrotazionale*; φ è il *potenziale di velocità.*

La (5) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \varphi)^2 + \operatorname{grad} (U + \Pi) = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \varphi^2 + U + \Pi = \text{cost.}$$

Tale costante dovrebbe invero essere sostituita da una funzione arbitraria di t, la quale può supporsi aggiunta alla φ incognita.

L'equazione (4) di continuità diventa ora

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0.$$

b) Supponiamo invece

$$\operatorname{rot} v \neq 0$$

in un determinato istante: sarà quindi sempre diversa da zero, pel teorema precedente: cioè $\Omega \neq 0$. Il moto dicesi allora *vorticoso*.

Le linee (variabili col tempo) la cui tangente in P è parallela ad Ω, sono dette *vorticali*: una superficie σ costituita da linee vorticali dicesi *vorticoide*: o anche, *linee* o *superficie vorticose*.

Per un vorticoide σ_0, all'istante t_0, avremo

$$\Omega \times n = 0:$$

quindi dalla (9) risulta ancora $c = 0$: cioè la costante c è nulla per ogni valore di t e però

$$\int_s v \times dP = 0:$$

cioè la circuitazione lungo s_0 (contorno di σ_0) è nulla per ogni valore di t: e però sulla superficie σ_1 trasformata di σ_0, al tempo t sarà pure

$$\Omega \times n = 0:$$

dunque: *un vorticoide (o una linea vorticale) è sempre costituito dalle stesse particelle fluide.*

Consideriamo un *tubo vorticale*: cioè un volume τ racchiuso da due superficie σ e σ' e da un fascio di linee vorticali σ_0, che dai punti del contorno di σ vanno ai punti del contorno di σ'. Poichè

$$\operatorname{div} \Omega = 0.$$

il teorema della divergenza ci dà

$$\int \operatorname{div} \Omega \, d\tau = -\int \Omega \times n d\sigma + \int \Omega \times n' d\sigma' - \int \Omega \times n'' d\sigma = 0.$$

Ma su σ'' è $\Omega \times n'' = 0$: quindi (avendo preso n e n' con senso concorde)

$$\int_{\sigma} \Omega \times n d\sigma = \int_{\sigma'} \Omega \times n' d\sigma' :$$

cioè il flusso della rotazione è costante lungo il tubo vorticale. Se un tale tubo è infinitesimo si deduce il teorema sulla costanza della portata di un vorticoide elementare; ecc.

c) Si può anche dedurre agevolmente una proprietà relativa ai cosidetti *moti stazionari* (irrotazionali o vorticosi), pei quali tutti gli elementi del moto, potendo variare da punto a punto del fluido, sono però indipendenti dal tempo. Supponiamo sempre le forze F derivabili da un potenziale U; poscia moltiplichiamo la (5) scalarmente per dP. Il primo termine è zero perchè v non dipende da t: quindi risulterà

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 \times dP + (\operatorname{rot} v) \wedge v \times dP + \operatorname{grad} (U + \Pi) \times dP = 0.$$

Ma

$$(\operatorname{rot} v) \wedge v \times dP = (\operatorname{rot} v) \wedge v \times v \, dt = 0 :$$

quindi la precedente si scrive

$$\frac{1}{2} dv^2 + d(U + \Pi) = 0 ;$$

integrando si ha

$$v^2 + 2 (U + \Pi) = \text{cost.}$$

che esprime il teorema di D. Bernoulli pei moti stazionari.

CAPITOLO V.

Applicazioni alla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.

1. Formule preliminari. — Ammetteremo già dedotte le equazioni indefinite ed al contorno per l'equilibrio dei corpi elastici isotropi, e messe rispettivamente sotto la forma [1],

$$(1) \qquad \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Omega}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{s} - \omega^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{s} = 0$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} \boldsymbol{F}_\sigma + (\boldsymbol{\Omega}^2 - 2\omega^2)\boldsymbol{n} \operatorname{div} \boldsymbol{s} + 2\omega^2 \frac{d\boldsymbol{s}}{dn} + \omega^2 \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{s} = 0;$$

$\boldsymbol{F}$ è il vettore della forza di massa, $\boldsymbol{F}_\sigma$ il vettore della tensione (per unità d'area), $\boldsymbol{s}$ lo spostamento in un punto qualunque P del corpo τ, che supporremo *aciclico*, o del suo contorno σ; $\boldsymbol{\Omega}^2$ ed ω^2 le due costanti di isotropia; $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario normale a σ e volto verso l'interno di τ.

Nel caso in cui $\boldsymbol{F} = 0$, cioè nell'assenza di forze di massa, due soluzioni particolari della (1) sono:

$$\boldsymbol{s}' = \operatorname{grad} \frac{1}{r}, \quad \boldsymbol{s}'' = \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{m}}{r} = \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) \wedge \boldsymbol{m},$$

dove r è la distanza di un polo fisso dal punto generico variabile del corpo; $\boldsymbol{m}$ un vettore unitario costante.

Se $\boldsymbol{F} = 0$ e sul contorno σ del corpo è pure $\boldsymbol{s} = 0$, si avrà in tutto il corpo $\boldsymbol{s} = 0$; in altre parole: *per dati spostamenti dei punti del contorno, la soluzione delle equazioni dell'equilibrio elastico, se esiste, non può essere che unica.*

[1] Cfr. *Analyse vectorielle générale*, l. c., vol. II.

Moltiplichiamo infatti la (1) scalarmente per s ed integriamo a tutto il volume τ del corpo: si avrà

$$k\int s \times \operatorname{grad} \operatorname{div} s \, d\tau - \int s \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} s \, d\tau = 0 \tag{3}$$

in cui

$$k = \Omega^2 / \omega^2.$$

Ora si hanno le due seguenti identità (Par. I, Cap. VI)

$$\operatorname{div}(s \operatorname{div} s) = (\operatorname{div} s)^2 + s \times \operatorname{grad} \operatorname{div} s$$
$$\operatorname{div}(s \wedge \operatorname{rot} s) = (\operatorname{rot} s)^2 - s \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} s;$$

integriamole al volume τ. A primo membro si può applicare il teorema della divergenza ed avremo

$$-\int n \times s \operatorname{div} s \, d\sigma = \int (\operatorname{div} s)^2 d\tau + \int s \times \operatorname{grad} \operatorname{div} s \, d\tau$$
$$-\int n \times s \wedge \operatorname{rot} s \, d\sigma = \int (\operatorname{rot} s)^2 d\tau - \int s \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} s \, d\tau;$$

e siccome s è nullo su σ, i primi membri sono nulli e quindi

$$\int (\operatorname{div} s)^2 d\tau = -\int s \times \operatorname{grad} \operatorname{div} s \, d\tau,$$
$$\int (\operatorname{rot} s)^2 d\tau = \int s \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} s \, d\tau;$$

le quali permettono di trasformare la (3) in questa

$$k\int (\operatorname{div} s)^2 d\tau + \int (\operatorname{rot} s)^2 d\tau = 0;$$

e però in ogni punto di τ debbono essere nulli rot s e div s.

Essendo nulla la rot, risulta (Par. II, Cap. II, 3)

$$s = \operatorname{grad} \varphi$$

essendo φ una funzione monodroma, ecc., perchè lo spazio τ è supposto aciclico. Avremo inoltre in tutto τ

$$\operatorname{div} s = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0.$$

Sul contorno σ poi è $\varphi = \text{cost.}$ Sarà dunque, in tutto τ, $s = \text{cost.}$, per un noto teorema di analisi e quindi in τ, $s = 0$.

Le stesse conseguenze valgono qualunque sia il numero k, purchè positivo.

Notiamo infine che il teorema di reciprocità del BETTI viene espresso dalla

$$(4)\qquad \int F \times s\, d\tau + \frac{1}{\varrho}\int F_\sigma \times s' d\sigma = \int F \times s\, d\tau + \frac{1}{\varrho}\int F_\sigma' \times s\, d\sigma,$$

essendo s lo spostamento corrispondente alle forze F ed alle tensioni (in superficie) F_σ; s' quello relativo alle F ed F_σ'.

2. **Formule del Betti per la divergenza e la rotazione dello spostamento.** — Nella ipotesi di $F' = 0$ si faccia $s' = \operatorname{grad}\frac{1}{r}$. Tale spostamento è finito e continuo in uno spazio τ' che si deduce da τ, dopo averne escluso il volume τ_1 racchiuso da una sfera σ_1 col centro nel polo O (che fa parte del corpo) e da cui si contano le distanze r.

Osserviamo quindi che (Par. II, Cap. II, 2)

$$\operatorname{div} s' = \operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = 0$$

e però la (2) ci dà

$$(5)\qquad \frac{1}{\varrho} F_\sigma' + 2\omega^2 \frac{ds'}{dn} = 0.$$

Applicando la (4) al volume τ' si ha

$$(6)\qquad \int F \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\, d\tau' + \frac{1}{\varrho}\int F_\sigma \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\, d\sigma + 2\omega^2 \int s \times \frac{d \operatorname{grad}\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma$$
$$= \frac{1}{\varrho}\int (F_\sigma' \times s - F_\sigma \times s')\, d\sigma_1.$$

Indichiamo con n_1 un vettore unità normale a σ_1 e volto verso l'interno di τ', cioè verso l'esterno della sfera e notiamo che le derivate rispetto alla normale si trasformano in derivate rispetto r: allora, tenendo presenti la (2) e la (5), si ha

$$(7)\qquad \frac{1}{\varrho}(F_\sigma' \times s - F_\sigma \times s') = \Omega^2 - 2\omega^2 n_1 \times s' \operatorname{div} s$$
$$+ \omega^2 s' \times n_1 \operatorname{rot} s + 2\omega^2\left(s' \times \frac{ds}{dr} - s \times \frac{ds'}{dr}\right).$$

Ora si rifletta che

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{s}' = \boldsymbol{n}_1 \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}:$$

inoltre

$$d\sigma_1 = r^2 d\sigma_0$$

essendo $d\sigma_0$ l'elemento di superficie sferica unitaria concentrica a σ_1. Quindi se integriamo la (7) alla sfera σ_1 e poi passiamo al limite per σ_1 tendente a zero (O è a distanza finita dal contorno), il primo termine del secondo membro ha evidentemente per limite

$$-4\pi(\Omega^2 - 2\omega^2)(\operatorname{div} \boldsymbol{s})_0,$$

in cui l'indice esprime che il valore della div è calcolato nel polo O. Il secondo termine è identicamente nullo perchè

$$\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{n}_1 \setminus \operatorname{rot} \boldsymbol{s} = \operatorname{rot} \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{s}' \setminus \boldsymbol{n}_1,$$

ed $\boldsymbol{s}'$ è parallelo ad $\boldsymbol{n}_1$. Passiamo finalmente al terzo e poniamo

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 + r\boldsymbol{a}.$$

Poichè

$$\boldsymbol{s}' = -\frac{\boldsymbol{n}_1}{r^2}, \quad \frac{d\boldsymbol{s}'}{dr} = \frac{2\boldsymbol{n}_1}{r^3},$$

risulta

$$\boldsymbol{s}' \times \frac{d\boldsymbol{s}}{dr} - \boldsymbol{s} \times \frac{d\boldsymbol{s}'}{dr} = -\frac{3\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{a}}{r^2} - \frac{2\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{s}_0}{r^3}.$$

Integriamo a σ_1 ed a secondo membro si applichi il teorema della divergenza. Il secondo termine, essendo $\operatorname{div} \boldsymbol{s}_0 = 0$, non dà nulla; sicchè avremo

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \left(\boldsymbol{s}' \times \frac{d\boldsymbol{s}}{dr} - \boldsymbol{s} \times \frac{d\boldsymbol{s}'}{dr}\right) d\sigma_1 &= -\frac{3}{r^2}\int_\tau \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{s}}{r} - \frac{\boldsymbol{s}_0}{r}\right) d\tau_1 \\
&= -\frac{3}{r^2}\int_\tau \operatorname{div}\boldsymbol{s}\, d\tau_1 - \frac{3}{r^2}\int_\tau (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_0) \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\, d\tau_1 \\
&= -\frac{3}{r^3}\int_\tau \operatorname{div}\boldsymbol{s}\, d\tau_1 - \frac{3}{r^3}\int_\tau r^2 (\operatorname{grad}\frac{1}{r} \times \boldsymbol{a})\, d\tau_1.
\end{aligned}$$

Passando al limite, come precedentemente, il primo integrale tende a $-4\pi(\operatorname{div} \boldsymbol{s}_0)$; il secondo tende a zero insieme con $\boldsymbol{a}$. Dunque il limite del secondo membro della (6) è

$$-4\pi\Omega^2(\operatorname{div} \boldsymbol{s})_0.$$

L'integrale

$$\int F \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\tau'$$

è convergente; dunque:

$$-4\pi\Omega^2 (\operatorname{div} s)_o = \int F \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\tau + \frac{1}{\rho} \int F_\tau \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\tau$$

$$+ 2\omega^2 \int s \times \frac{d \operatorname{grad} \frac{1}{r}}{dn} d\tau.$$

Il secondo membro può porsi sotto una forma diversa, riflettendo che r, grandezza della distanza di P da O, è una funzione simmetrica di P ed O. Quindi

$$F \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} = - F \times \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)_o = - \left(\operatorname{div} \frac{F}{r}\right)_o,$$

in cui coll'indice o intendiamo accennare che il grad e la div sono calcolati supponendo variabile il punto O. In conseguenza

$$\int F \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\tau = - \left(\operatorname{div} \int \frac{F d\tau}{r}\right)_o;$$

inoltre

$$s \times \frac{d \operatorname{grad} \frac{1}{r}}{dn} = - \left(\operatorname{div} s \frac{d \frac{1}{r}}{dn}\right)_o;$$

$$\left[\operatorname{grad}\left(s \times \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right]_o \times n = \left[\operatorname{grad}\left(n \times \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right]_o \times s$$

$$= s \times \left(\operatorname{grad} \frac{d \frac{1}{r}}{dn}\right)_o = \left[\operatorname{div}\left(s \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} \cdot n\right)\right]_o.$$

Se dunque definiamo un nuovo vettore u, tale che

$$(8) \qquad u = \int \frac{F d\tau}{r} + \frac{1}{\rho} \int \frac{F_\tau d\tau}{r} + \omega^2 \int \left(s \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} \cdot n + n \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} \cdot s\right) d\tau$$

e togliamo ora l'indice o, otterremo

$$(9) \qquad 4\pi\Omega^2 \operatorname{div} s = \operatorname{div} u.$$

Con un calcolo del tutto analogo, benchè meno semplice, e partendo dalla soluzione particolare

$$s' = \operatorname{rot} \frac{m}{r}$$

delle (1) per $F = 0$, si trova

$$4\pi\omega^2 \operatorname{rot} s = \operatorname{rot} u. \tag{10}$$

Abbiamo cioè le formule del Betti nella forma loro data dal Cerruti: ed esprimono che: *la divergenza e la rotazione dello spostamento sono proporzionali alla rotazione ed alla divergenza di un vettore dipendente dalle forze di massa, dalle tensioni e dagli spostamenti al contorno* [1].

Il vettore u può, a sua volta, interpretarsi come somma di tre funzioni potenziali di spazio, di strato semplice e doppio.

3. **Formule del Somigliana.** — Dalla formula (10), osservando che

$$\operatorname{rot}(4\pi\omega^2 s - u) = 0,$$

si deduce

$$4\pi\omega^2 s = u + \operatorname{grad} \varphi.$$

Prendiamo la divergenza e sottraiamo da (9): otterremo

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta_2 \varphi = -4\pi(\Omega^2 - \omega^2) \operatorname{div} s;$$

e a questa, come vedremo nel capitolo seguente, può soddisfarsi ponendo

$$\varphi = (\Omega^2 - \omega^2) \int_e \frac{\operatorname{div} s}{r} d\tau + \varphi'$$

essendo

$$\Delta_2 \varphi' = 0.$$

Un calcolo assai breve fa trovare

$$\varphi = \omega^2 \int_e \frac{s \times n}{r} d\tau$$

[1] Betti: *Teoria della elasticità* [Nuovo Cimento, 1872].
Cerruti: *Ricerche sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi* [Mem. Acc. Lincei, t. 13 (1882)].

quindi

$$(11)\quad 4\pi\omega^2 s = u + \Omega^2 - \omega^2 \operatorname{grad}\int \frac{\operatorname{div} s}{r}\, d\tau + \omega^2 \operatorname{grad}\int \frac{s \times n}{r}\, d\sigma$$

che esprime lo spostamento in un punto qualunque O del corpo.

A secondo membro della (11) compariscono non solamente le forze di massa, le tensioni e gli spostamenti al contorno, ma anche la divergenza dello spostamento in un punto qualunque del corpo. Questo termine può eliminarsi. Anzi più generalmente mostreremo che

$$\int r^{k-2} \operatorname{div} s\, d\tau, \quad \text{con} \quad k > -1$$

si può esprimere mediante le forze di massa, le tensioni e gli spostamenti al contorno.

Consideriamo lo spostamento

$$s' = \operatorname{grad} r^k;$$

esso è regolare in tutto τ, compreso il polo, purchè

$$k > -1.$$

Avremo allora dalla (1) e (2), pel calcolo delle forze di massa e delle tensioni al contorno corrispondenti a quello spostamento,

$$F' = -k(k+1)\Omega^2 \operatorname{grad} r^{k-2};$$

$$\frac{1}{2} F_\tau' = -k(k+1)(\Omega^2 - 2\omega^2) r^{k-2} n - 2\omega^2 \operatorname{grad} \frac{dr^k}{dn}.$$

Ora applichiamo il teorema di reciprocità ed osserviamo che

$$\int r^{k-2} s \times n\, d\sigma = -\int \operatorname{div}(r^{k-2} s)\, d\tau =$$

$$= -\int r^{k-2} \operatorname{div} s\, d\tau - \int s \times \operatorname{grad} r^{k-2} d\tau.$$

Troveremo:

$$(12)\quad k(k+1)\Omega^2 \int r^{k-2} \operatorname{div} s\, d\tau = \int F' \times \operatorname{grad} r^k d\tau + \frac{1}{2}\int F_\tau \times \operatorname{grad} r^k d\tau$$

$$+ 2\omega^2 \int s \times \left(\frac{d \operatorname{grad} r^k}{dn} - k(k+1) r^{k-2} n\right) d\sigma.$$

Per $k = 1$ abbiamo la formula che ci occorre per eliminare dalla (11) il termine di cui si è detto. Otteniamo con ciò, sotto forma vettoriale, le formule date dal SOMIGLIANA [1].

Per $k = 2$ si ha pure una formula notevolissima. Infatti in tal caso

$$\frac{d \operatorname{grad} r^2}{dn} = 2 \frac{d}{dn} (P - O) = 2n;$$

l'ultimo termine del secondo membro della (12) si trasforma in

$$-8\omega^2 \int s \times n d\tau = 8\omega^2 \int \operatorname{div} s \, d\tau$$

e quindi la (12) diventa

$$(13) \qquad 3\Omega^2 - 4\omega^2 \int \operatorname{div} s d\tau = \int F \times (P - O) d\tau + \frac{1}{2} \int F_\tau \times (P - O) d\tau$$

e dà la *dilatazione cubica totale* espressa per le forze di massa e le tensioni al contorno; ed è dovuta al BETTI.

(1) SOMIGLIANA: *Sulle equazioni della elasticità* [Ann. di Matem., s. 2, t. 17 (1889)].

CAPITOLO VI.

Applicazioni alla Elettrodinamica.

1. **Potenziali ritardati.** — La funzione potenziale newtoniana di una massa distribuita in un volume τ, colla densità h funzione del punto P variabile in τ, e che attrae un punto O di massa 1 colla legge di Newton, quando si supponga pure eguale ad 1 la costante di gravitazione, è data da

$$\varphi = \int \frac{h(P)}{r} d\tau \quad \text{con} \quad r = \text{mod}(P - O). \tag{1}$$

La funzione φ è monodroma, finita e continua insieme alle sue derivate prime in τ e, con ipotesi abbastanza generali sulla funzione h, soddisfa in τ alla equazione di Poisson:

$$\Delta_2 \varphi = -4\pi h. \tag{2}$$

Si può dire cioè che φ, dato da (1), è un integrale della (2).

Supponiamo ora che h vari col tempo e che le azioni elementari dei singoli elementi di massa si propaghino da P in O con velocità eguale ad $1/a$ ed in linea retta. Tale azione adunque per propagarsi da P in O impiegherà un tempo eguale ad ar; ed il potenziale in O e al tempo t si calcolerà colla (1), prendendo per h il valore che questa funzione ha in P al tempo $t - ar$.

Porremo in tal caso

$$\varphi = \int \frac{h(P, t - ar)}{r} d\tau = \int \frac{h(t - ar)}{r} d\tau, \tag{3}$$

tralasciando, quando non nascano confusioni, l'argomento P.

φ dicesi *potenziale ritardato* della massa distribuita in τ, sul punto O, con velocità $1/a$.

Notiamo subito il divario sostanziale tra (1) e (3). In (1) la h è relativa al punto P ed indipendente dal punto poten-

ziato O: nella (3) invece la h, oltre che da P, dipende dal punto potenziato per mezzo del binomio $t - ar$. Sorge quindi la domanda: quale sarà per i potenziali ritardati l'equazione analoga a quella di POISSON?

Osserviamo che la (3) può scriversi

$$\varphi = \int \frac{h(t)}{r}\, d\tau + \int \frac{h(t - ar) - h(t)}{r}\, d\tau; \tag{4}$$

calcolando $\Delta_2 \varphi$, t essendo fisso, il primo integrale, per la (2), ci dà $4\pi h(t)$: occupiamoci dunque del secondo. Supponiamo h derivabile due volte rispetto al tempo e, pel momento, si indichi a con α. Se poniamo

$$f = \frac{h(t + \alpha r) - h(t)}{r} = \alpha h_1(t + \alpha\theta r), \quad 0 < \theta < 1$$

avendo accennato con h_1 la $\partial h / \partial t$, è chiaro che il secondo integrale in (4) è sempre finito. Inoltre

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\alpha h_1(t + \alpha r)}{r} - \frac{h(t + \alpha r) - h(t)}{r^2} \right) \operatorname{grad} r = A \operatorname{grad} r,$$

avendo posto

$$A = \frac{\alpha h_1(t + \alpha r)}{r} - \frac{h(t + \alpha r) - h(t)}{r^2}, \tag{5}$$

cioè

$$A = \frac{\alpha h_1(t + \alpha r) - \alpha h_1(t + \alpha\theta r)}{r} = \alpha^2(1 - \theta)\, h_2(t + \alpha\theta_1 r),$$

con

$$0 < \theta_1 < \theta \quad \text{e} \quad h_2 = \partial^2 h / \partial t^2.$$

e poichè A è sempre finito, sarà pure $\operatorname{grad} f$ sempre finito in τ, cioè le derivate di f sono sempre finite.

Abbiamo ancora:

$$\Delta_2 f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = A \operatorname{div} \operatorname{grad} r + \operatorname{grad} r \times \operatorname{grad} A;$$

e dalla (5)

$$\operatorname{grad} A = \left(\frac{\alpha^2 h_2(t + \alpha r)}{r} - \frac{\alpha h_1(t + \alpha r)}{r^2} - \frac{\alpha h_1(t + \alpha r)}{r^2} + 2\, \frac{h(t + \alpha r) - h(t)}{r} \right) \operatorname{grad} r$$

$$= \left(\frac{\alpha^2 h_2(t + \alpha r)}{r} - \frac{2A}{r} \right) \operatorname{grad} r.$$

Rammentando quindi che:

$$(\text{grad}\, r)^2 = 1, \quad \text{div}\, \text{grad}\, r = 2\, r,$$

risulta facilmente

$$_2 f = \frac{\alpha^2 h_2(t + \alpha r)}{r};$$

cioè $_2 f$ diventa infinito soltanto come $1/r$ nel polo O, supposto appartenente alla massa. Però l'integrale di $_2 f$ esteso al volume τ ha un significato, cioè è convergente e quindi

$$_2\int_\tau f d\tau = \int_\tau {}_2 f d\tau = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_\tau \frac{h(t + \alpha r)}{r} d\tau = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Concludiamo, adunque, che in ogni punto P dello spazio τ occupato da masse si ha

$$(6) \qquad {}_2\varphi - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi h(P, t);$$

mentre in ogni punto esterno a τ avremo

$$(7) \qquad {}_2\varphi - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \text{ [1]}.$$

Le (6) e (7) sono, pei potenziali ritardati, rispettivamente, le analoghe delle equazioni di POISSON (2) e di LAPLACE.

Si usa abbreviare ponendo

$$\Box \varphi = {}_2\varphi - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Supponiamo ora che la funzione φ di P e di t soddisfi in tutto lo spazio infinito alla equazione:

$$\Box \varphi = f$$

essendo f una funzione nota dei punti dello spazio e di t.

[1] L. LORENZ: *Mémoire sur la théorie de l'élasticité des corps homogènes à élasticité constante* [Journal für reine u. ang. Mathem., B. LVIII, pp. 329-351 (1860-61)].

Per $t=0$ supporremo noti i valori di φ e $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ e inoltre che φ sia nulla all'infinito. Queste condizioni individuano la funzione φ.

Supponiamo che esistano due di tali funzioni φ e φ' e sia V la loro differenza. Avremo in tutto lo spazio

$$\square V = \Delta_2 V - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0:$$

per $t=0$, $V = \partial V/\partial t = 0$: e di più $V=0$ all'infinito.

Moltiplichiamo per V l'equazione precedente ed integriamo allo spazio τ racchiuso da una superficie sferica σ tracciata con raggio arbitrario r; avremo

$$a^2 \int V V'' d\tau - \int V \Delta_2 V d\tau = 0,$$

ponendo, come d'uso, $V' = \partial V/\partial t$, $V'' = \partial^2 V/\partial t^2$.

Ma per uno dei lemmi di GREEN (Par. II, Cap. II, 2) si ha

$$-\int V \frac{dV}{dr} d\sigma + \int V \Delta_2 V d\tau + \int (\text{grad } V)^2 d\tau = 0:$$

onde sommando colla precedente si ha

$$\frac{1}{2}\int \frac{dV^2}{dr} d\sigma = a^2 \int V V'' d\tau + \int \text{grad } V^2 d\tau.$$

Se V e V' fossero sempre nulle il teorema sarebbe dimostrato. Consideriamo quell'istante t_1 (diverso dall'istante $t=0$) a cominciar dal quale V e V' cessano di essere nulle. Allora se V cresce, cioè assume valori positivi, anche V' è positiva; se V decresce, cioè assume valori negativi, anche V' è negativa. Dunque per $t > t_1$, V e V' hanno lo stesso segno: lo stesso può dirsi per V e V'': e però il secondo membro dell'ultima equazione è positivo. E sarà quindi ancora positivo il primo membro diviso per la superficie σ; cioè

$$\int \frac{dV^2}{dr} \frac{d\sigma}{\sigma} > 0.$$

Ora poniamo

$$u = \int V^2 \frac{d\sigma}{\sigma}:$$

ed osserviamo che nel passaggio da una sfera di raggio r ad una concentrica di raggio $r + dr$ sarà

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1},$$

se $d\sigma_1$ è la proiezione di $d\sigma$ su σ_1 dal centro comune. Quindi

$$\frac{du}{dr} = \int \frac{dV^2}{dr} \frac{d\sigma}{\sigma} = 0;$$

cioè u cresce con r indefinitamente. Ciò è impossibile perchè all'infinito $V = 0$. Sarà dunque $V = 0$ sempre [1].

Osserviamo da ultimo che come si considerano delle funzioni potenziali, così possiamo considerare ancora dei vettori potenziali dedotti con legge analoga alla (1): cioè

$$u = \int \frac{h}{r} d\tau$$

in cui u ed h sono due vettori. Parimenti potranno considerarsi dei vettori potenziali ritardati con legge analoga alla (3) e che soddisferanno ad una equazione del tutto analoga alla (6).

Si possono infine considerare dei potenziali ritardati di strato semplice e di doppio strato [2].

2. **Le equazioni di Maxwell-Hertz dell'elettrodinamica dei corpi in riposo** [3]. — Queste equazioni vengono dedotte applicando anzitutto le leggi di Biot-Savart e di Ohm.

La prima esprime che il lavoro della forza magnetica (misurata nel sistema elettro-magnetico) originata da una corrente,

(1) J. Boussinesq: *Théorie analytique de la chaleur*: Paris, 1903, t. II, pp. 540 e seg.

(2) Volterra: *Sul principio di Huygens* [N. Cimento, s. III, t. XXXI, pp. 244-255; t. XXXII, pp. 59-65 (1892); t. XXXIII, pp. 71-77 (1893)].

(3) In tutto questo capitolo, per uniformarci alle notazioni di Maxwell, si è adottata una convenzione diversa da quella sin qui seguita pel senso della terna fondamentale e che non è più quindi il senso destrogiro, ma levogiro; e lo stesso dicasi pel verso del prodotto vettoriale.

allorchè l'unità positiva di magnetismo percorre una curva chiusa, facendo un sol giro intorno alla corrente, è espresso da

$$\int_s \boldsymbol{H} \times d\boldsymbol{P} = 4\pi \cdot \text{intensità di corrente}$$

essendo $\boldsymbol{H}$ il vettore della forza magnetica. La misura della intensità della corrente si ottiene riguardando questa come la risultante della *corrente di conduttività* e di quella di *spostamento*.

La prima, in base alla legge di OHM, ha per misura elettrostatica

$$\int_\sigma \lambda \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} d\sigma .$$

essendo λ una costante (l'inversa della resistenza specifica), $\boldsymbol{E}$ il vettore della forza elettrica, σ un diaframma che ha per contorno s ed $\boldsymbol{n}$ un vettore unità normale a σ.

La seconda, considerata da MAXWELL, ha per misura

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}}{\partial t} d\sigma$$

essendo ε la costante dielettrica del mezzo. Detta a la costante per cui bisogna moltiplicare queste due intensità per esprimerle in misure elettro-magnetiche, avremo

$$(8) \qquad \int_s \boldsymbol{H} \times d\boldsymbol{P} = a\left(4\pi\int_\sigma \lambda \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} d\sigma + \int_\sigma \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}}{\partial t} d\sigma\right).$$

Applicando il teorema di STOKES al primo membro e tenendo presente che nel caso dei corpi in riposo σ è immobile, si ha

$$\int_\sigma \left(\text{rot } \boldsymbol{H} - a\left(4\pi\lambda \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\right) \times \boldsymbol{n} d\sigma = 0;$$

e per l'arbitrarietà di σ e di $\boldsymbol{n}$ si deduce

$$(9) \qquad \text{rot } \boldsymbol{H} = a\left(4\pi\lambda \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right);$$

che è una *prima relazione* tra la forza magnetica $\boldsymbol{H}$ e la forza elettrica $\boldsymbol{E}$.

La seconda equazione si ottiene dalle leggi dell'induzione di FARADAY: cioè: *la forza elettromotrice totale di una corrente*

di circuito chiuso s, è proporzionale alla variazione del flusso di forza magnetica per unità di tempo, attraverso un diaframma σ avente per contorno il circuito s.

Inoltre: *un osservatore, situato al modo solito nella direzione del flusso, vede la direzione della forza elettromotrice agire in senso inverso a quello delle lancette di un orologio* (legge di LENZ).

Quindi potremo scrivere:

$$\int_s E \times dP = C \int \mu \frac{\partial (H \times n)}{\partial t} d\sigma, \tag{10}$$

essendo μ il coefficiente di permeabilità magnetica. Si ha accordo coi fatti sperimentali prendendo $C = a$; allora collo stesso metodo di prima si deduce

$$\operatorname{rot} E = a\mu \frac{\partial H}{\partial t}; \tag{11}$$

che è la *seconda relazione* fra forza elettrica e magnetica.

Se supponiamo si tratti di un corpo non conduttore, cioè $\lambda = 0$, e consideriamo una superficie chiusa σ, moltiplicando scalarmente la (9) per n e tenendo presente la (4) del Cap. II, risulta, integrando,

$$\int \varepsilon E \times n d\sigma = \text{cost.};$$

e così dalla (11)

$$\int \mu H \times n d\sigma = \text{cost.};$$

quindi ancora

$$-\frac{1}{4\pi}\int \varepsilon E \times n d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div} \varepsilon E d\tau = e = \text{cost.}:$$

e dicesi *quantità di elettricità* racchiusa da τ: $\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \varepsilon E$ rappresenta quindi la quantità di elettricità contenuta nel volume $d\tau$: e però dicesi densità elettrica nell'intorno di $d\tau$: si pone anche

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \varepsilon E = \rho_e. \tag{12}$$

Le stesse cose possono ripetersi per la *quantità* e la *densità* del magnetismo.

Supponendo tutte le funzioni precedenti indipendenti dal

tempo (fenomeni elettrostatici), dalla (11) deduciamo

$$\text{rot}\, \boldsymbol{E} = 0$$

e quindi

$$\boldsymbol{E} = -\,\text{grad}\, V;$$

allora fatto $\varepsilon = 1$ (caso del vuoto), la (12) ci dà

$$-\,\text{div}\,\text{grad}\, V = 4\pi\rho,$$

ossia

$$\Delta_2 V = -\,4\pi\rho,$$

e V è il *potenziale elettrostatico.*

3. **Vettore radiante e teorema di Poynting.** — Dalle (9) e (11) si ricava agevolmente

$$\boldsymbol{E} \times \text{rot}\, \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \times \text{rot}\, \boldsymbol{E} = a \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2}{2}\right) + 4\pi a \lambda \boldsymbol{E}^2$$
$$= -\,\text{div}\,(\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}).$$

Il vettore

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}$$

dicesi *vettore radiante.*

Integrando la relazione precedente, moltiplicata internamente per $\boldsymbol{n}$, ad uno spazio qualunque τ, ed applicando il teorema della divergenza, otterremo:

$$\int_\tau \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = a \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau \frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2}{2}\, d\tau + 4\pi a \int_\tau \lambda \boldsymbol{E}^2 d\tau.$$

L'ultimo integrale del secondo membro esprime l'energia calorifica del sistema o calore di JOULE: il primo, diviso per $4\pi a$, esprime la somma dell'energia elettrica e magnetica dei conduttori chiusi in τ: onde *la quantità di energia che entra in uno spazio chiuso nella unità di tempo, è eguale al flusso del vettore radiante attraverso la superficie diviso per* $4\pi a$.

Se poi ammettiamo che tale legge valga ancora al limite per una superficie elementare $d\sigma$, si può dire che: *l'energia elettromagnetica si muove in una direzione normale a quella della forza elettrica e magnetica, in modo che nella unità di tempo, attraverso l'unità di superficie, entra una quantità di energia proporzionale al flusso del vettore radiante.*

4. Integrali delle equazioni di Maxwell-Hertz. — Immaginiamo un mezzo isotropo omogeneo e indefinito, sede di fenomeni elettrodinamici. Poniamo

$$j = \lambda E;$$

diremo j *vettore della corrente di conduzione*. Scriveremo le equazioni (9) e (11) sotto la forma seguente

$$(13)\quad \begin{cases} \operatorname{rot} H = a\left(\varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} + 4\pi j\right) \\ -\operatorname{rot} E = a\mu \dfrac{\partial H}{\partial t}. \end{cases}$$

Sia h la densità elettrica in un punto qualunque P del campo τ; cioè

$$h = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \varepsilon E.$$

Se σ è una qualunque superficie chiusa tracciata in τ, dalla prima delle (13), col solito modo, si deduce

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon E \times n d\sigma + 4\pi \int j \times n d\sigma = 0,$$

cioè, pel teorema della divergenza,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \operatorname{div} \varepsilon E d\tau + 4\pi \int \operatorname{div} j \, d\tau = 0;$$

e tenendo presente il valore di h e l'arbitrarietà di τ, si ha

$$(14)\quad \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0$$

che dicesi *equazione di continuità* (cfr. Par. II, Cap. IV).

Diciamo ora φ il *potenziale elettrostatico ritardato* con velocità $\dfrac{1}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}$; J il *vettore potenziale* relativo ad j, ritardato pure colla stessa velocità; cioè poniamo

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi = \displaystyle\int \frac{h(P, t - a\sqrt{\varepsilon\mu}\, r)}{r} d\tau \\ J = a \displaystyle\int \frac{j(P, t - a\sqrt{\varepsilon\mu}\, r)}{r} d\tau. \end{cases}$$

Tra questi due potenziali, in virtù della (14), sussiste una relazione che ora vogliamo trovare.

Teniamo sempre presente che r è la distanza tra il punto P, variabile in tutto lo spazio, ed il punto fisso O (polo). Avremo

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{J})_o = -a\int \boldsymbol{j} \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\,d\tau + a^2\sqrt{\varepsilon\mu}\int \boldsymbol{j}' \times \operatorname{grad} r\,\frac{d\tau}{r},$$

avendo accennato con $\boldsymbol{j}'$ la derivata di $\boldsymbol{j}$ rispetto alla t.

Ma a sua volta

$$\int \operatorname{div}\frac{\boldsymbol{j}}{r}\,d\tau = \int \frac{1}{r}\operatorname{div}\boldsymbol{j}\,d\tau + \int \boldsymbol{j} \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\,d\tau = -\int \frac{\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{n}}{r}\,d\sigma = 0,$$

se supponiamo nulle le correnti all'infinito; quindi

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{J})_o = a\int \left(\operatorname{div}\boldsymbol{j} + a\sqrt{\varepsilon\mu}\,\boldsymbol{j}' \times \operatorname{grad} r\right)\frac{d\tau}{r} = a\int (\operatorname{div}\boldsymbol{j})_o\,\frac{d\tau}{r}$$

volendo indicare con $(\operatorname{div}\boldsymbol{j})_o$ che la $\operatorname{div}\boldsymbol{j}$ è relativa al punto P ed all'istante $t - a\sqrt{\varepsilon\mu}\,r$. D'altra parte la (14) vale in qualunque istante: considerata nell'istante $t - a\sqrt{\varepsilon\mu}\,r$, moltiplicata per $\frac{d\tau}{r}$ ed integrata ci dà

$$\int (\operatorname{div}\boldsymbol{j})_o\,\frac{d\tau}{r} = -\int \frac{\partial \rho(P,\, t - a\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)}{\partial t}\,\frac{d\tau}{r} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

La relazione richiesta è dunque, togliendo l'indice o,

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0. \tag{16}$$

Ciò premesso vediamo che si può soddisfare identicamente alle (13) ponendo

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi - a\mu\dfrac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} \\ \boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{J}. \end{cases} \tag{17}$$

In un paragrafo seguente mostreremo il metodo diretto per dedurre queste equazioni; per ora limitiamoci a vedere che esse verificano le (13).

Dalla prima, infatti, si ha

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = a\mu \frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{J}}{\partial t} = a\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

che è appunto la seconda delle (13). Poscia

$$a\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = a \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a^2\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{J}}{\partial t^2},$$

e in virtù dell'equazione (6) cui soddisfano i potenziali ritardati, si ha pure

$$a\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = a \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - 4\pi a \boldsymbol{j} + \nabla^2 \boldsymbol{J};$$

ma dalla seconda delle (17) si ha

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{J} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{J} - \nabla^2 \boldsymbol{J};$$

quindi

$$a\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \operatorname{grad} \left(a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{J} \right) - 4\pi a \boldsymbol{j}$$

e questa in virtù della (16) dà la prima delle (13).

Le (17) costituiscono propriamente un sistema di *integrali funzionali* delle (13), poichè la ricerca del vettore potenziale dipende da quella del vettore della corrente che è in generale incognito. In casi speciali è però possibile la determinazione del potenziale elettrostatico e del vettore potenziale ritardato: per esempio nel caso della convezione elettrica per cariche dotate di moto di traslazione; ecc.

5. Le equazioni di Lorentz. — Le equazioni fondamentali del campo magnetico nella teoria elettronica di LORENTZ sono:

$$(18) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = a \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{E} \right) \\ -\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = a \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \dfrac{1}{4\pi} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \end{cases}$$

Le prime due sono analoghe alle equazioni di MAXWELL-HERTZ; ma la prima dice che la corrente totale è la risultante di quella di spostamento e di quella di convezione (ROWLAND). In altre parole le correnti di conduzione sono sostituite da queste altre correnti dovute a cariche costanti aderenti agli elettroni. La quarta esprime che non vi ha magnetismo; finalmente v è la velocità degli elettroni rispetto all'etere supposto in riposo.

Definiamo il vettore j della corrente totale

$$4\pi j = \frac{\partial E}{\partial t} + v \operatorname{div} E = \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\rho v. \tag{19}$$

Calcolando la div e notando che

$$\operatorname{div} v = 0,$$

perchè l'elettrone si muove come un sistema rigido, si ha

$$\operatorname{div} j = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \times \operatorname{grad} \rho = \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

(Par. II, Cap. IV), essendo ρ invariabile col tempo: dunque

$$\operatorname{div} j = 0. \tag{20}$$

Definiamo ancor qui il vettore potenziale, cioè

$$J = a \int \frac{j d\tau}{r}; \tag{21}$$

allora con un ragionamento analogo a quello fatto nel paragrafo precedente si prova che è

$$\operatorname{div} J = 0. \tag{22}$$

Delle equazioni stabilite si possono trovare due integrali funzionali.

Infatti se poniamo

$$\begin{cases} E = -a \dfrac{\partial J}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \\ H = \operatorname{rot} J \end{cases} \tag{23}$$

abbiamo successivamente

$$\text{rot}\, E = -a \frac{\partial\, \text{rot}\, J}{\partial t} = -a \frac{\partial H}{\partial t}$$

cioè la seconda delle (18); poi

$$\text{rot}\, H = \text{rot rot}\, J = \text{grad div}\, J - \Delta_2 J = 4\pi a j,$$

che è la prima delle (18).

Si vede subito inoltre che φ è l'ordinario potenziale elettrostatico. Infatti

$$\text{div}\, E = 4\pi\rho = -\text{div grad}\, \varphi = -\Delta_2 \varphi.$$

Notiamo finalmente che insieme al sistema (18) dobbiamo anche considerare la solita equazione di continuità (dedotta dalla condizione $\text{div}\, j = 0$) cioè

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho v) = 0. \tag{24}$$

Possiamo ora trovare dei veri integrali di queste equazioni, supponendo conosciuti ρ e v in ogni punto dello spazio e supponendo inoltre il mezzo in riposo per $t = 0$ e tutte le funzioni nulle all'infinito.

La quarta del sistema (18) suggerisce di porre

$$H = \text{rot}\, U,$$

essendo U un vettore incognito. La seconda diventa

$$\text{rot}\left(E + a \frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0$$

e quindi

$$E + a \frac{\partial U}{\partial t} = -\text{grad}\, \varphi'.$$

Sostituendo i valori di E, H nella prima delle (18) risulta:

$$\text{rot rot}\, U = -a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a\, \text{grad} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + 4\pi a \rho v = \text{grad div}\, U - \Delta_2 U$$

cioè

$$\text{grad}\left(\text{div}\, U + a \frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right) = \Delta_2 U - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4\pi a \rho v.$$

Decomponiamo ora U in due vettori U', U'', poniamo cioè

$$U = U' + U''$$

e assoggettiamo il primo a soddisfare l'equazione

$$\Delta_2 U' - a^2 \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} = -4\pi a \rho r.$$

Possiamo quindi assumere, per ciò che vedemmo al § 1,

$$U' = a \int \frac{\rho r}{r} d\tau,$$

in cui (ρr) è calcolato nel punto generico P e per l'istante $t - ar$; e quindi U' *è il vettore potenziale ritardato, ma relativo alla sola corrente di convezione.*

La U'' dovrà in conseguenza soddisfare alla equazione

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div} U' + \operatorname{div} U'' + a \frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right) = \Delta_2 U' - a^2 \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2};$$

ma già notammo che

$$\operatorname{div} U' = a \int \frac{(\operatorname{div} \rho r)}{r} d\tau = -a \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{(\rho)}{r} d\tau$$

per la (24). Se dunque poniamo

$$\varphi' = \int \frac{(\rho)}{r} d\tau,$$

sarà φ' il *potenziale* (scalare) *elettrostatico ritardato;* e la U'' soddisferà alla

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} U'' = \Delta_2 U'' - a^2 \frac{\partial^2 U''}{\partial t^2};$$

che ha la stessa forma dell'equazione del moto di un corpo elastico isotropo. Siccome per $t = 0$, U' e $\frac{\partial U'}{\partial t}$ sono nulli, così si comprende che dovrà essere sempre $U'' = 0$.

Possiamo del resto vederlo così. Si ponga

$$\operatorname{div} U'' = u$$

e prendiamo la divergenza della equazione precedente; si avrà

$$\Delta u = \Delta u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

cioè $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$; sarà dunque sempre $u = 0$ e quindi

$$\Delta' U'' - a^2 \frac{\partial^2 U''}{\partial t^2} = 0;$$

cioè $U'' = 0$. Dunque gl'integrali cercati del sistema (18) sono

$$E = -a \frac{\partial U'}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi'$$

$$H = \operatorname{rot} U',$$

coi quali si soddisfa ancora la terza delle stesse (18), e dove U' e φ' hanno i valori ed i significati precedentemente chiariti.

La soluzione è poi unica. Se infatti ce ne fossero due, detta e la differenza dei due valori di E, ed h quella dei due valori di H, avremmo, oltre alle solite condizioni iniziali,

$$\operatorname{rot} e = -a \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} h = a \frac{\partial e}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} e = \operatorname{div} h = 0.$$

Da queste risulta

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} h = \operatorname{grad} \operatorname{div} h - \Delta' h = a \operatorname{rot} \frac{\partial e}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

e quindi

$$\Delta' h - a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

con $h = \frac{\partial h}{\partial t} = 0$, per $t = 0$; inoltre h è nulla all'infinito e però sarà sempre $h = 0$ (cfr. § 1).

Lo stesso dicasi per e.

APPENDICE ALLA PARTE SECONDA

Quaternioni di Hamilton.

Secondo una *opinione* molto diffusa, il calcolo dei quaternioni dovrebbe costituire un *calcolo geometrico* ***completo***.

Certamente nessuno può avere più grande ammirazione di quella che noi abbiamo per l'opera geniale di HAMILTON [1]. Pure non possiamo dividere l'opinione, quasi generale, sopra citata. Ma non basta non dividerla; bisogna provare che la nostra idea è giusta, bisogna provare fino a qual punto i quaternioni costituiscono un calcolo geometrico, da qual punto comincia la loro impotenza.

In questa Appendice noi *deduciamo* dai *vettori* e dalle operazioni $\times$, $\wedge$, per essi, *tutto ciò che è fondamentale per la teoria generale dei quaternioni* [2].

Risulta dalla nostra trattazione, come anche dalla definizione di HAMILTON [cfr. n. 4 di questa Appendice], che i quaternioni sono degli *operatori vettoriali in un campo a* ***due*** *dimensioni*, e che, per un medesimo campo, coincidono con gli operatori complessi dedotti da i e che noi abbiamo esaminati nel Cap. IV della Parte prima di questo libro. Dunque: introducendo i quaternioni non si introducono *nuovi elementi*, come si è fatto [cfr. Appendice alla Parte prima] introducendo le **F** e il *prodotto alternato*: non si esce affatto dal campo stabilito col sistema minimo. Nè le operazioni *somma*, *prodotto*, per i quaternioni, possono farci uscire da tale campo perchè, anzi, esse riducono l'operatore quaternione dal campo vettoriale a *due* dimensioni a quello ad-*una* sola

(1) Si intende per l'opera *originale* di HAMILTON e non per le volgarizzazioni o raffazonamenti dei suoi seguaci che hanno svisata, anzi deturpata, l'opera di HAMILTON.

(2) Sempre inteso, quelli originali di HAMILTON. Ciò prova, *en passant*, che il *sistema minimo* sviluppato nella Parte prima di questo libro, *non è impotente*.

dimensione. Resta così ben stabilito che: *con i quaternioni non è possibile ottenere, **sotto forma assoluta**, le rette, i piani, i sistemi di forze, le coppie.*

Anche le *omografie vettoriali* non possono risultare, *sotto forma assoluta*, dai quaternioni e dalle operazioni *somma, prodotto*, che li collegano, perchè questo collegamento riduce il campo di applicabilità ad una sola dimensione. Inoltre: i quaternioni sono per ogni giacitura, non in tutto lo spazio) operatori lineari a quattro dimensioni, mentre le *omografie vettoriali* che si presentano nelle questioni geometrico-fisico-meccaniche, sono *operatori lineari, **in tutto lo spazio**, a sei e nove dimensioni*, anche se non vogliamo tener conto delle derivate delle omografie rispetto ad un punto, che sono operatori lineari a *ventisette* dimensioni.

Resta così provata l'assoluta impotenza dei quaternioni per dare un *calcolo geometrico **assoluto** generale*.

Da dove proviene, dunque, l'opinione, così diffusa, che abbiamo citata in principio? I seguaci di HAMILTON, dopo aver soppressi gli operatori geometrici I, I $^{-1}$, ed aver quindi *identificati vettori e quaternioni retti*, che ***sono enti ben distinti***, hanno ottenuti dei *tachigrafi*, un *sistema di notazioni abbreviate*, per le *coordinate cartesiane*. Operando, come si fa generalmente, per mezzo delle coordinate cartesiane, i predetti tachigrafi, che sono poi dei *quaternioni deformati*, permettono di scrivere il resultato finale sotto forma abbreviata e colui che opera ha l'*illusione* di aver fatto uso di un *calcolo geometrico*; *pura illusione* perchè le coordinate non possono essere eliminate e i pseudo-quaternioni dei seguaci di HAMILTON rimangono dei semplici tachigrafi al servizio delle coordinate. In altri termini, tanto i *quaternioni* di HAMILTON, quanto i *pseudo-quaternioni* dei seguaci di HAMILTON, possono dare un *calcolo geometrico **tachigrafico** per le coordinate*, ma non un *calcolo geometrico **assoluto***; e questi due calcoli sono di specie e di portata ben diversa!

Dei quaternioni (sempre inteso di HAMILTON e non di altri) una parte rimane necessaria: quella che noi abbiamo sviluppata nel Cap. IV della Parte prima di questo libro. Tutto il resto, vale a dire i quaternioni in generale e il collegamento, mediante *somma, prodotto*, ecc., fra i quaternioni relativi a giaciture diverse, *può* essere eliminato, anzi, diremo, *deve* essere eliminato, perchè, a parte la complicazione del suo algoritmo completamente diverso da quello algebrico, non dà niente di più di quello che dànno il *sistema minimo* e le *omografie vettoriali* (necessarie e *non deducibili* dai quaternioni). L'opera ammirabile di HAMILTON perde nulla del suo immenso valore scientifico e storico; solo si trasforma, come avviene per tutti i prodotti del genio umano; ma è meglio trasformarla, o sostituirla, piuttosto che ridurla ad un complesso di enti non precisati e impotenti come hanno fatto i seguaci di HAMILTON.

1. **Operatori vettoriali e loro campi di applicazione.** — Al solo scopo di abbreviare il linguaggio, in tutto ciò che segue, chiameremo *operatore vettoriale* ogni simbolo (di funzione) α, che applicato (a sinistra) ad un vettore $\boldsymbol{u}$, qualunque o appartenente ad una data classe, produce un vettore, $\alpha\boldsymbol{u}$. Ad es.: i, $e^{\frac{\pi}{2}}$ sono operatori vettoriali per i vettori paralleli ad un piano (cioè per i vettori x normali ad un vettore unitario $\boldsymbol{u}$ tale che $i.x = \boldsymbol{u} \wedge x$); se $\boldsymbol{u}$ è un vettore, $\boldsymbol{u}+$, $\boldsymbol{u}-$, $\boldsymbol{u}\wedge$ sono operatori vettoriali per tutti i vettori, nel senso stabilito, mentre il simbolo $\boldsymbol{u}\times$ che può operare su di un vettore qualunque x, non è operatore vettoriale nel senso stabilito perchè produce un numero in luogo di un vettore, il numero $\boldsymbol{u}\times x$.

Definito un operatore vettoriale α per i vettori di un determinato campo, questo è il *campo d'applicabilità di* α: si intende dipendentemente dalla particolare definizione di α. Ad es.: il campo di applicabilità di i, $e^{\frac{\pi}{2}}$ è formato dai soli vettori normali al vettore unitario $\boldsymbol{u}$ per mezzo del quale si è definito i; $\boldsymbol{u}+$, $\boldsymbol{u}-$, $\boldsymbol{u}\wedge$ hanno per campo di applicabilità tutti i vettori.

2. **Definizione dei quaternioni mediante i simboli $\times$ $\wedge$ di operazione per i vettori.** — *Diremo che α è un quaternione quando esiste, almeno, un numero reale s e un vettore $\boldsymbol{u}$ soddisfacenti alle condizioni che seguono:* 1ª *α è un operatore vettoriale il cui campo di applicazione è formato dai soli vettori normali ad $\boldsymbol{u}$;* 2ª *qualunque sia il vettore x normale ad $\boldsymbol{u}$ si ha sempre*

$$\alpha x = sx + \boldsymbol{u} \wedge x. \tag{1}$$

Ecco due teoremi fondamentali:

Teorema I. — *Essendo dato un quaternione α, esiste un solo numero reale s ed un solo vettore $\boldsymbol{u}$ tali che la* (1) *vale per qualsiasi vettore x normale ad $\boldsymbol{u}$.*

Dalla definizione di quaternione risulta che esiste almeno una coppia s, $\boldsymbol{u}$. Siano s, $\boldsymbol{u}$ e s', $\boldsymbol{u}'$ due di tali coppie. Per definizione, il campo di applicabilità di α deve esser formato dai vettori x normali ad $\boldsymbol{u}$ ed $\boldsymbol{u}'$. Si avrà

$$sx + \boldsymbol{u} \wedge x = s'x + \boldsymbol{u}' \wedge x$$

e quindi

$$(s - s')x = (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}) \wedge x.$$

Moltiplicando scalarmente ($\times$) e vettorialmente ($\wedge$) per x e ricordando che x, $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}$ sono normali ad x si ha

$$(s - s')x^2 = 0, \quad 0 = (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}) \wedge x \wedge x = x^2 \cdot (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}):$$

e poichè esiste almeno un vettore x, non nullo, normale ad $\boldsymbol{u}$ ed $\boldsymbol{u}'$, si avrà $s = s'$ e $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$, c. d. d.

TEOREMA II. — *Sia α un quaternione dato e supponiamo che essendo dato un vettore x appartenente al campo di applicabilità di α, si sia potuto determinare un numero reale s e un vettore u tali che*

$$\alpha x = sx + u \wedge x .$$

In tali ipotesi, s ed u sono gli elementi che, secondo il teorema I, *individuano il quaternione α, vale a dire la* (1) *vale per gli elementi s, u così trovati qualunque sia il vettore x normale ad u.*

In virtù del teorema I, α è determinato da un numero s' e da un vettore u', per i quali si ha

$$\alpha x = s'x + u' \wedge x$$

e in conseguenza

$$(s - s')x = (u' - u) \wedge x ;$$

operando come nel teorema I si ha $s = s'$ e $u = u'$, c. d. d. [1].

3. **Simboli S, V, K, T; quaternioni retti.** — Adottando le notazioni e le denominazioni di HAMILTON, ed essendo α un quaternione, porremo

$$S\alpha = \text{« scalare di } \alpha \text{ »}, \qquad T\alpha = \text{« vettore di } \alpha \text{ »}$$
$$K\alpha = \text{« coniugato di } \alpha \text{ »}, \qquad V\alpha = \text{« tensore di } \alpha \text{ »}.$$

$S\alpha$ è il numero s e $V\alpha$ è il vettore u dei quali, nel teorema I, abbiamo dimostrata l'esistenza e l'univocità. Con queste notazioni la (1) prende la forma assoluta

$$\alpha x = (S\alpha)x + (V\alpha) \wedge x \tag{2}$$

essendo peraltro bene inteso che: *la* (2) *vale per x normale a $V\alpha$ e* ***soltanto*** *per tali vettori.*

$K\alpha$ è il quaternione che ha lo stesso scalare di α, ma ha per vettore il vettore di α cambiato di segno (stesso modulo e direzione, ma verso contrario). Vale a dire $K\alpha$ è il quaternione che, in base alle precedenti notazioni e al teorema I, è definito da

$$S(K\alpha) = S\alpha , \qquad V(K\alpha) = - V\alpha ;$$

[1] Si noti che $s + u \wedge$ è un operatore vettoriale il cui campo d'applicabilità è formato da tutti i vettori e si ha

$$(s + u \wedge)x = sx + u \wedge x ;$$

ma il teorema II non è vero per l'operatore $s + u \wedge$, mentre è vero per i quaternioni. Ne segue che $s + u \wedge$ non è un quaternione: diventerebbe tale limitando il suo campo di applicabilità ai vettori normali ad u, ma ciò non può farsi.

o ancora che, per x vettore normale a $V\alpha$, dà sempre

$$(K\alpha)x = (S\alpha)x - (V\alpha)\wedge x.$$

$T\alpha$ resta definito dalla condizione

$$T\alpha = +\sqrt{(S\alpha)^2 + (V\alpha)^2}.$$

Un quaternione il cui vettore è nullo opera come un numero reale, precisamente come il suo scalare, come risulta subito dalla (2) che, per $V\alpha = 0$, dà $\alpha x = (S\alpha)x$.

Un quaternione il cui scalare è nullo si chiamerà ***quaternione retto.***

Se nella (2) si pone $S\alpha = 0$, si ha

$$\alpha x = (V\alpha)\wedge x$$

da cui *non può dedursi*, contrariamente a quanto affermano i seguaci di Hamilton, che il quaternione retto α coincida col suo vettore; vale a dire *è* ***assolutamente falso*** *che i quaternioni retti siano vettori* [1].

Osserviamo, infine, che se α, β sono quaternioni, allora

$\alpha = \beta$ solamente quando $S\alpha = S\beta$ e $V\alpha = V\beta$
$\alpha = 0$ » » $S\alpha = 0$ e $V\alpha = 0$, cioè $T\alpha = 0$,

convenendo di indicare con 0 il quaternione *nullo*, cioè quello tale che, per x vettore arbitrario, si ha sempre $\alpha x = 0$.

4. **Definizione di Hamilton: identità di questa definizione con la precedente.** — Hamilton definisce (Libro I) un quaternione α per mezzo di due vettori a, b (con $a \neq 0$) del suo campo di applicabilità, nel modo seguente: *è l'operatore vettoriale, il cui campo di applicabilità è formato dai vettori x complanari con a e b, e tale che, qualunque sia il punto O, il triangolo di vertici O, $O+x$, $O+\alpha x$ è* ***direttamente simile*** *al triangolo di vertici O, $O+a$, $O+b$.*

Per dimostrare che *i quaternioni ottenuti con la definizione del n. 2 sono i quaternioni di* Hamilton, e non altri enti, basterà provare che: *il quaternione α definito,* ***secondo la definizione del n. 2,*** *dalle condizioni*

$$(3) \qquad S\alpha = \frac{a \cdot b}{a^2}, \quad V\alpha = \frac{a \wedge b}{a^2}$$

possiede le proprietà caratteristiche date dalla definizione di Hamilton.

[1] Per $S\alpha = 0$, dalla $\alpha x = (V\alpha)\wedge x$ non può neanche dedursi che α sia *identico* all'operatore vettoriale $(V\alpha)\wedge$ perchè α opera sui vettori normali a $V\alpha$ e soltanto su questi, mentre $(V\alpha)\wedge$ opera su *tutti* i vettori. L'errore dei seguaci di Hamilton è dunque molto grave; ma vedremo che tale errore non è stato assolutamente commesso da Hamilton.

Il campo di applicabilità del quaternione α definito dalle (3) è formato dai vettori normali ad $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ [cfr. n. 2] vale a dire dai vettori complanari con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$: questa è appunto la prima condizione enunciata da HAMILTON.

Se $\boldsymbol{x}$ è vettore normale ad $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, cioè complanare con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, allora dalle (2), (3) e da note proprietà dei simboli $\times$, $\wedge$ si ha

$$(\alpha\boldsymbol{x})^2 = \left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\right)^2 \boldsymbol{x}^2 + \left(\frac{\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\right)^2 \boldsymbol{x}^2 = \frac{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{a}^2}\,\boldsymbol{x}^2 = \left(\frac{\operatorname{mod}\boldsymbol{b}}{\operatorname{mod}\boldsymbol{a}}\operatorname{mod}\boldsymbol{x}\right)^2$$

e in conseguenza

$$\frac{\operatorname{mod}(\alpha\boldsymbol{x})}{\operatorname{mod}\boldsymbol{x}} = \frac{\operatorname{mod}\boldsymbol{b}}{\operatorname{mod}\boldsymbol{a}}$$

e quindi

$$\cos(\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}\times\alpha\boldsymbol{x}}{\operatorname{mod}\boldsymbol{x}\cdot\operatorname{mod}(\alpha\boldsymbol{x})} = \frac{\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\,\boldsymbol{x}^2}{\dfrac{\operatorname{mod}\boldsymbol{b}}{\operatorname{mod}\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{x}^2} = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\operatorname{mod}\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{mod}\boldsymbol{b}} = \cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b});$$

queste due eguaglianze provano che il triangolo di vertici O, $O+\boldsymbol{x}$, $O+\alpha\boldsymbol{x}$ è *direttamente simile* al triangolo di vertici O, $O+\boldsymbol{a}$, $O+\boldsymbol{b}$, che è appunto la seconda condizione di HAMILTON [1].

5. **Somma e prodotto dei quaternioni.** — Siano α, β dei quaternioni.

Chiameremo « *somma* di α con β », e la indicheremo con $\alpha+\beta$, quel quaternione γ tale che

$$(a) \qquad \gamma\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$$

qualunque sia il vettore $\boldsymbol{x}$ normale a $V\alpha$ e a $V\beta$.

Chiameremo « *prodotto* di α per β », e, con HAMILTON, lo indicheremo con $\beta\alpha$ (e non con $\alpha\beta$), il quaternione γ tale che

$$(b) \qquad \gamma\boldsymbol{x} = \beta(\alpha\boldsymbol{x})$$

[1] HAMILTON indica il quaternione α (3) con la notazione $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ che pone in evidenza i due vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ che individuano il quaternione. La notazione, simbolica, $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$, simile a quella algebrica, è stata scelta perchè, essendo in virtù delle (3),

$$\alpha\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\,\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\,\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\,\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{a}^2}\,\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

si ha, come in Algebra,

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}.$$

qualunque sia il vettore x tale che x è normale a $V\alpha$ e αx è normale a $V\beta$ [1].

Facendo uso del teorema II del n. 2, si dimostra, come faremo, ed è importante il farlo, che:

Se α, β sono quaternioni, allora $\alpha+\beta$, $\beta\alpha$ sono pure quaternioni univocamente determinati, funzioni di α e β soltanto, che restano individuati dalle eguaglianze seguenti:

$$S(\alpha+\beta)=S\alpha+S\beta,\quad V(\alpha+\beta)=V\alpha+V\beta, \tag{4}$$

$$\begin{cases} S(\beta\alpha)=S\beta\cdot S\alpha-(V\beta)\times(V\alpha) \\ V(\beta\alpha)=S\beta\cdot V\alpha+S\alpha\cdot V\beta+(V\beta)\wedge(V\alpha). \end{cases} \tag{5}$$

Sia x un vettore (ed esiste certamente) normale a $V\alpha$ e a $V\beta$; si ha, in virtù della (2) e della definizione di $\alpha+\beta$,

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x=(S\alpha+S\beta)x+(V\alpha+V\beta)\wedge x;$$

ma esiste un quaternione che ha per *scalare* e *vettore* i secondi membri delle (4) e quindi l'eguaglianza ora ottenuta e il teorema II dimostrano le (4).

Sia x un vettore normale a $V\alpha$ essendo, inoltre, αx normale a $V\beta$ [vettore del quale abbiamo dimostrata la esistenza nella nota precedente]. Allora sotto tali ipotesi si ha

$$(V\beta)\wedge[(V\alpha)\wedge x]=x\times V\beta\cdot V\alpha$$

e quindi

$$\begin{aligned}\beta(\alpha x)&=\beta[S\alpha\cdot x+(V\alpha)\wedge x]\\ &=S\beta\cdot S\alpha\cdot x+S\beta\cdot(V\alpha)\wedge x+S\alpha\cdot(V\beta)\wedge x+(V\beta)\wedge[(V\alpha)\wedge x]\\ &=[S\beta\cdot S\alpha-(V\beta)\times(V\alpha)]x+[S\beta\cdot V\alpha+S\alpha\cdot V\beta+(V\beta)\wedge(V\alpha)]\wedge x;\end{aligned}$$

ma esiste un quaternione che ha per *scalare* e *vettore* i secondi membri delle (5) e quindi, dalla eguaglianza ora ottenuta, dalla definizione di $\beta\alpha$ e dal teorema II risultano le (5).

[1] Esiste un vettore x, almeno, che soddisfa a queste due condizioni. Infatti se si pone

$$\alpha x=sx+u\wedge x\quad\text{e}\quad v=V\beta$$

si deve avere

$$(sx+u\wedge x)\times v=sv\times x-u\wedge v\times x=(sv-u\wedge v)\times x=0;$$

basta dunque che x sia normale ad $u=V\alpha$ e a $sv-u\wedge v$, vale a dire sia parallelo al vettore

$$u\wedge(sv-u\wedge v)=s\cdot u\wedge v-u\times v\cdot u+u^2\cdot v.$$

Quando il vettore x soddisfa alle ipotesi fatte per (a) e (b) allora si ha

$$(6) \qquad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad (\beta\alpha)x + \beta(\alpha x) \ldots$$

Conviene notare subito esplicitamente che: *i primi membri delle (6) hanno significato per vettori x di un campo (a due dimensioni) più vasto del campo (ad una dimensione) nel quale deve variare x affinchè abbiano significato i secondi membri delle (6).* Ad es., per la prima delle (6), Γx del primo membro *può* essere un vettore normale a $V\alpha + V\beta$, mentre Γx del secondo membro *deve* essere normale tanto a $V\alpha$ quanto a $V\beta$, cioè parallelo a $(V\alpha) \wedge (V\beta)$ [1].

Risulta dalle (4) che la somma di due quaternioni è *commutativa*,

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

e le (5) provano che il prodotto di due quaternioni *non è*, in generale, *commutativo* (così, in generale, $\alpha\beta \neq \beta\alpha$); ma, *la proprietà commutativa del prodotto sussiste quando uno, almeno, dei due quaternioni ha vettore nullo, cioè opera come un numero.*

Sussistono dunque per i quaternioni le ordinarie proprietà dell'algoritmo algebrico, salvo la commutativa per il prodotto.

[1] È chiaro che se α, β sono quaternioni i cui vettori sono paralleli (come per i complessi i, $e + iy$, [2]) il campo di applicabilità di $\alpha + \beta$ e di $\beta\alpha$ coincide con quello di α e di β e le (6) valgono per x variabile in un campo a due dimensioni.

Per comprendere l'apparente anomalia che abbiamo ora dedotta dalle (6), bisogna tener presente che un *quaternione* è **omografia vettoriale** *in un campo a due dimensioni, ma* **non** *in un campo a tre dimensioni.* Se i quaternioni α, β non hanno i vettori paralleli, cioè i loro campi di applicabilità sono in giaciture distinte, è chiaro che $\alpha + \beta$ e $\beta\alpha$ devono avere un campo di applicabilità più ristretto e precisamente un campo ad una dimensione.

È per mezzo di questa semplice osservazione che si spiegano le disparate opinioni che i matematici hanno riguardo ai quaternioni. La stessa osservazione permette di vedere anche che se si conserva ai quaternioni il carattere hamiltoniano primitivo (originale); ed è l'*unico* logicamente ammissibile, questi non possono dare che indirettamente, e quindi sotto forma complicata, le omografie vettoriali nel campo a tre dimensioni, omografie che sono precisamente quelle che si presentano spontaneamente nelle applicazioni geometrico fisico meccaniche. Più precisamente una *omografia vettoriale*, introdotta secondo i metodi di Hamilton si presenta come una funzione di tre vettori *variabili* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ e di un sistema *fisso*, unitario ortogonale destrogiro $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, quindi si perde il carattere *assoluto* delle omografie [cfr. *L'Enseignement Mathématique*, XII, n. 1]. Viene così confermata l'*impotenza* dei quaternioni nel *calcolo assoluto*.

Se α, β, γ, ... sono quaternioni risulta facilmente dalla (4), (5) che

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad \gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha, \ \ldots.$$

e quindi, definita come in Algebra, la somma e il prodotto di tre o più quaternioni, si hanno le proprietà ordinarie, salvo la commutativa per il prodotto.

Se si opera con quaternioni *coassiali*, cioè aventi tutti vettori paralleli, si ritrovano gli operatori vettoriali *complessi* e per essi sussiste *tutto* l'algoritmo algebrico.

Giova notare che relazioni analoghe alle (6) per tre o più vettori non sussistono, in generale, che per $x = 0$; e ciò conferma la più volte notata impotenza dei quaternioni [1].

6. **Potenze.** — Si possono definire, come in Algebra, le potenze α^0, α^1, α^2, α^3, ... di un quaternione α.

Siccome il prodotto *è associativo* si ha

$$\alpha^m \alpha^n = \alpha^{m+n}$$

e poichè *non è commutativo* si ha, in generale,

$$(\beta\alpha)^n \neq \beta^n \alpha^n.$$

Se il quaternione α non è nullo si porrà

$$\alpha^{-1} = \text{« quel quaternione } \beta \text{ tale che } \beta\alpha = 1 \text{ »}$$

e si dimostra facilmente che

$$\alpha^{-1} = \frac{K\alpha}{(T\alpha)^2}.$$

[1] Se α è un quaternione non nullo il simbolo, di HAMILTON,

$$U\alpha = \frac{\alpha}{T\alpha}, \quad \text{« versore di } \alpha \text{ »}$$

può sempre esser posto sotto la forma

$$U\alpha = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$$

ove i è un *quaternione vetto* (a scalare nullo) il cui tensore vale 1.

Per i costante si ritrovano gli operatori vettoriali complessi.

7. **Operatori I, I^{-1}.** — Sia α un *quaternione retto*, cioè un quaternione il cui scalare è nullo. Noi porremo, con HAMILTON,

$$I\alpha = V\alpha \text{ (}^1\text{)}.$$

Se α, β sono quaternioni retti da $I\alpha = I\beta$ segue $\alpha = \beta$ e viceversa; quindi l'*operatore* I *è invertibile*. Sotto altra forma: essendo $\boldsymbol{u}$ un vettore noi possiamo porre

$$I^{-1}\boldsymbol{u} = \text{« quel quaternione retto il cui vettore è } \boldsymbol{u} \text{ »}.$$

Ne risulta che se α è un quaternione retto del quale $\boldsymbol{u}$ è il vettore, le due eguaglianze

$$I\alpha = \boldsymbol{u}, \quad \alpha = I^{-1}\boldsymbol{u}$$

esprimono, sotto forma diversa, la stessa cosa.

Giova osservare che se α, β sono *quaternioni retti*, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sono *vettori* e m è un *numero reale*, si ha

$$I(\alpha + \beta) = I\alpha + I\beta, \quad I^{-1}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = I^{-1}\boldsymbol{u} + I^{-1}\boldsymbol{v}$$
$$I(m\alpha) = m(I\alpha) \qquad I^{-1}(m\boldsymbol{u}) = m(I^{-1}\boldsymbol{u}).$$

I teoremi seguenti sono fondamentali.

TEOREMA I. — *Qualunque sia il quaternione α si ha identicamente*

$$\alpha = S\alpha + I^{-1}(V\alpha). \tag{8}$$

Infatti. Il quaternione $\alpha - S\alpha$ è retto e il suo vettore è $V\alpha$; quindi, per la definizione di I,

$$I(\alpha - S\alpha) = V\alpha,$$

da cui, per la definizione di I^{-1},

$$\alpha - S\alpha = I^{-1}(V\alpha), \quad \alpha = S\alpha + I^{-1}(V\alpha), \qquad \text{c. d. d.}$$

TEOREMA II. — *Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sono vettori si ha*

$$(I^{-1}\boldsymbol{v})(I^{-1}\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} + I^{-1}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}), \tag{9}$$

vale a dire, $-\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$ sono, rispettivamente, lo scalare e il vettore del quaternione che è prodotto dei due quaternioni retti che hanno per vettore, rispettivamente, $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

(1) Non si può dedurre da questa posizione $I = V$ perchè I opera soltanto su quaternioni retti, mentre V opera su quaternioni qualunque, vale a dire I e V hanno campi di applicabilità diversi e *basta* questo fatto per concludere che $I \neq V$.

Ciò risulta subito dalle (5) se si osserva che

$$S(I^{-1}u) = S(I^{-1}v) = 0, \quad V(I^{-1}u) = u, \quad V(I^{-1}v) = v.$$

TEOREMA III. — *Se u, v sono vettori, $u \neq 0$, ed essendo α, β quaternioni scriviamo provvisoriamente $\frac{\beta}{\alpha}$ in luogo di $\beta\alpha^{-1}$ per α non nullo, allora*

$$\frac{I^{-1}v}{I^{-1}u} = \frac{v \times u}{u^2} - I^{-1}\left(\frac{v \cdot u}{u^2}\right) \text{ (1)}, \tag{10}$$

vale a dire $\frac{v \times u}{u^2}$ e $-\frac{v \cdot u}{u^2}$ sono, rispettivamente, lo scalare e il vettore del quaternione primo membro della (10) prodotto di $(I^{-1}u)^{-1}$ per $I^{-1}v$.

Infatti: valendosi della (7) e osservando che il quaternione $I^{-1}u$ ha per coniugato $-I^{-1}u$ e per tensore il mod u, si ha

$$\frac{I^{-1}v}{I^{-1}u} = (I^{-1}v)(I^{-1}u)^{-1} = -\frac{1}{u^2}(I^{-1}v)(I^{-1}u)$$

che per la (9) dimostra la (10).

Vediamo ora una immediata applicazione del teorema II.

Siano i, j, k vettori di un sistema unitario-ortogonale-destro. I quaternioni i, j, k definiti dalle eguaglianze

$$i = I^{-1}i, \quad j = I^{-1}j, \quad k = I^{-1}k$$

verificano le formule seguenti che sono fondamentali per l'algoritmo tachigrafico cartesiano-quaternionale:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k,$$
$$ijk = jki = kij = -1.$$

Infatti si ha:

$$i^2 = (I^{-1}i)(I^{-1}i) = -i \times i + 0 = -1, \text{ ecc.},$$
$$jk = (I^{-1}j)(I^{-1}k) = -0 + I^{-1}(j \times k) = I^{-1}i = i, \text{ ecc.},$$
$$ijk = i(jk) = ii = i^2 = -1, \text{ ecc.}$$

(1) Confrontando (9) e (10) si ha

$$\frac{I^{-1}v}{I^{-1}u} = \frac{(I^{-1}v)(I^{-1}u)}{u^2}.$$

8. **La « symbolical identification » di Hamilton.** — HAMILTON, al principio della teoria dei quaternioni, definisce [cfr. n. 4] i simboli composti

$$\frac{v}{u}, \quad vu,$$

formati con i vettori u, v, come i quaternioni definiti dalle eguaglianze

$$(12) \quad \begin{cases} S\dfrac{v}{u} = \dfrac{v \times u}{u^2}, & V\dfrac{v}{u} = -\dfrac{v \wedge u}{u^2} \\ S(vu) = -v \times u, & V(vu) = v \wedge u. \end{cases}$$

In seguito, riconosce la *necessità* di introdurre gli operatori I, I^{-1} per poter passare, per mezzo di un operatore invertibile (e V non lo è), *da un quaternione retto al suo vettore* e *da un vettore al quaternione retto che lo ha come vettore*. Dopo aver stabilito le formule (9), (10) ed averle confrontate con le notazioni (11) e con le formule (12), HAMILTON conviene di « identificare le notazioni $I\alpha$, $I^{-1}u$ ad α ed u rispettivamente ». Peraltro HAMILTON fa uso ripetutamente, e con insistenza, della frase *symbolical identification*, per indicare la su esposta identificazione; dunque egli intende di parlare di una *identificazione di simboli* e *non* di una *identificazione logica di elementi tra loro diversi*; e che, per HAMILTON, *vettore* e *quaternione retto* siano *elementi diversi* è indiscutibile, poichè altrimenti egli non avrebbe introdotti gli operatori I, I^{-1}.

I seguaci di HAMILTON hanno soppressi gli operatori I, I^{-1} e *quaternione retto* è divenuto sinonimo di *vettore*; vale a dire alla *identificazione hamiltoniana di simboli*, hanno sostituito una *identificazione logica (o assoluta) di enti ben distinti*. La prima può condurre a degli errori (e difatti vi ha condotto), ma di per se stessa *non è un errore*; la seconda, invece, *è un indiscutibile ed ingiustificabile errore di logica*.

Essendo α un quaternione e x un vettore, la notazione αx ha, per HAMILTON, due significati ben distinti. *Prima* della *symbolical identification*, αx rappresenta un *vettore* e *nel solo caso* che x sia normale a $V\alpha$; in tutti gli altri casi αx è notazione priva di significato. *Dopo* della *symbolical identification*, αx è una *notazione abbreviata* che sostituisce la *notazione completa* $\alpha(I^{-1}x)$ prodotto del quaternione retto $I^{-1}x$ per il quaternione generico α. Il valore esplicito del quaternione $\alpha(I^{-1}x)$ è, come è facile verificare,

$$\alpha(I^{-1}x) = -x \times V\alpha + I^{-1}(S\alpha \cdot x + V\alpha \wedge x),$$

vale a dire $\alpha(I^{-1}x)$, o con notazione abbreviata αx, è il quaternione del quale lo scalare e il vettore sono, rispettivamente,

$$-x \times V\alpha, \quad S\alpha \cdot x + V\alpha \wedge x.$$

Se nelle formule (6), o nelle analoghe con più quaternioni, poniamo $\mathrm{I}^{-1}x$ al posto di x si ottengono formule che *sono vere qualunque sia* x; vale a dire che dopo la *symbolical identification* le formule (6), ed analoghe, si applicano ad un vettore x qualunque.

Per i seguaci di HAMILTON queste differenze spariscono totalmente; si ha l'*apparenza* di una *semplicazione*, ma, in sostanza, si ottiene un calcolo radicalmente erroneo [1].

9. **L'operatore ∇ (nabla).** — Sia α un quaternione funzione di un punto P che, in generale, varia in un campo a tre dimensioni.

HAMILTON definisce l'operatore ∇ ponendo

$$\nabla\alpha = i\frac{\partial\alpha}{\partial x} + j\frac{\partial\alpha}{\partial y} + k\frac{\partial\alpha}{\partial z}, \tag{13}$$

ovvero, sotto la forma simbolica indipendente da α,

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}, \tag{13'}$$

ove: i, j, k è sistema ortogonale destro di *quaternioni retti unitari*, definiti come nel n. 7 per mezzo del sistema unitario ecc. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ di *vettori*; x, y, z sono le coordinate cartesiane del punto P rispetto al sistema fisso $O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, vale a dire si ha

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = O + x\mathrm{I}i + y\mathrm{I}j + z\mathrm{I}k \text{ [2]}. \tag{14}$$

In tal modo l'operatore ∇ che, come vedremo, è elemento *assoluto*, cioè indipendente dal sistema $O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, risulta definito *mediante* il *sistema di riferimento*: è vero che si dimostra facilmente che $\nabla\alpha$ non varia col variare di $O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, ma ciò non toglie che la definizione dell'ente *assoluto* $\nabla\alpha$ risulti data *sotto forma non assoluta*.

Siano, u un *numero reale* e $\boldsymbol{u}$ un *vettore* funzioni del punto P. Dalle espressioni cartesiane di grad u, div $\boldsymbol{u}$, rot $\boldsymbol{u}$ e dalle (13) si ha

$$\operatorname{grad} u = \mathrm{I}^{-1}\nabla u \tag{15}$$

$$-\mathrm{I}^{-1}\nabla\boldsymbol{u} = -\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \mathrm{I}^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}. \tag{16}$$

[1] Su tale argomento cfr. C. BURALI-FORTI, *I quaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriale* (Atti Acc. Torino, vol. XLIII, 1908).

[2] HAMILTON e i suoi seguaci scrivono $xi + yj + zk$ adottando la notazione abbreviata; noi facciamo uso della notazione completa per non dar luogo ad equivoci.

ovvero sotto altra forma equivalente alla (16),

$$(16') \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = -\mathrm{S}\,\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{u} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \mathrm{V}\,\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{u}. \end{cases}$$

Dalle (15) e (16), tenendo presente la (8), si ha

$$(17) \qquad \nabla^2 z = \operatorname{div} \mathrm{V}z + \mathrm{I}^{-1} \operatorname{rot} \mathrm{V}z + \operatorname{grad} \mathrm{S}z \,,$$

e per le potenze dell'operatore ∇^2.

$$(18) \qquad \begin{cases} \nabla^4 z = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\mathrm{S}z + \mathrm{I}^{-1} \operatorname{rot}^2 \mathrm{V}z - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{V}z \\ \nabla^6 z = \operatorname{div}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{V}z + \mathrm{I}^{-1} \operatorname{rot}^3 \mathrm{V}z - \operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{grad}\mathrm{S}z \\ \text{ecc.} \end{cases}$$

La (17) fa vedere, senza far uso di trasformazioni di coordinate, che ∇^2 è *operatore assoluto* funzione di P ed z soltanto, e quindi che ∇ è *operatore assoluto* funzione di P soltanto, quando si sappia già che grad, div, rot sono operatori assoluti. Noti gli operatori grad, div, rot, la (17) può assumersi per *definire sotto forma assoluta l'operatore* ∇^2 [1].

Si hanno anche le identità seguenti:

$$(19) \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\operatorname{grad}\boldsymbol{u} = -\nabla^2\boldsymbol{u} \\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = -\mathrm{I}^{-2}\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{u}. \end{cases}$$

I due operatori

$$(20) \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad}, \quad \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}$$

hanno, rispettivamente, come campo di applicabilità i *numeri reali* e i *vettori* funzioni di P. Basta il fatto che i due operatori (20) hanno campi di applicabilità diversi per dedurre che *sono operatori distinti*; ma ciò è anche provato dal semplice esame dei secondi membri delle (19). Ora avendo i seguaci di HAMILTON soppressi gli operatori I, I^{-1} viene come conseguenza che i secondi membri delle (19) si ottengono applicando ad u, ovvero ad $\boldsymbol{u}$ indifferentemente, l'unico operatore

$$-\nabla^2.$$

[1] È chiaro che fino a quando non si sarà data una definizione assoluta di ∇ indipendente da grad, div, rot, le (15), (16') non permettono di definire questi ultimi operatori, in modo *assoluto*, mediante ∇. In ogni caso è necessario, se si vuole operare correttamente, fare uso degli operatori I, I^{-1} e non *sopprimerli* come hanno fatto i seguaci di HAMILTON, e nemmeno *sottintenderli* come ha fatto HAMILTON.

mentre, *effettivamente*, i secondi membri delle (19) si ottengono applicando agli elementi distinti u, u gli operatori, pure distinti,

$$- \quad ', \quad I \quad ^{2}I \quad ^{1},$$

aventi come *campi di applicabilità*, il primo i *numeri reali*, il secondo i *vettori*. Non mancano ancora autori che sostengono la *identità* dei due operatori, *distinti*, (20)! Ecco le conseguenze della inopportuna *symbolical identification* di HAMILTON, resa poi dai suoi seguaci un vero e proprio errore logico.

Speriamo di aver dimostrato ben chiaramente con le considerazioni precedenti: che il sistema vettoriale minimo basta per stabilire tutta la teoria dei quaternioni e sotto forma assoluta; che l'algoritmo dei quaternioni è troppo complesso e troppo dissimile da quello algebrico ordinario; che i quaternioni sono impotenti a risolvere sotto forma assoluta tutte le questioni geometrico-fisico-meccaniche; che dei quaternioni occorre conservare soltanto ciò che riguarda i *quaternioni coassiali*, coincidenti con gli *operatori vettoriali complessi*; che quando in ogni modo si voglia far uso dei quaternioni si deve *sopprimere* la *symbolical identification* e, quindi, *non sopprimere e nemmeno sottintendere* gli operatori I, I^{1}.

NOTE STORICHE

1. Origine, notazioni di vettore e di prodotto scalare e vettoriale.

a) WESSEL: *Om Directionens analytiske Betegning*, 1917; *Essai sur la représentation de la direction* [Publié par l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Academie, le 10 mars 1797, Copenhague, 1897];

ARGAND: *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, (1806) [oppure: Annales de Gergonne, t. IV, pp. 61-71 (1813-1814) e la edizione curata da J. Hönel (Paris, Gauthier-Villars, 1874)] considerarono esplicitamente il vettore come *linea retta*, o *linea*, o *ligne dirigée*.

Nel *barycentrische Calcül* di MÖBIUS (1827) (Gesamm. Werke, Bd. I) il vettore, non esplicitamente considerato, è un caso limite del baricentro di due punti le cui masse hanno somma nulla.

Gli studi del BELLAVITIS sul metodo delle equipollenze, in cui fa uso sistematico del vettore col nome euclideo di *retta*, cominciarono nel 1832, come egli stesso ha scritto al prof. Laisant. Comparvero poi queste pubblicazioni:

Sopra alcune applicazioni d'un nuovo metodo di Geometria analitica [Poligrafo, Giornale di Scienze, Lettere ed Arti (Verona, gennaio 1823) t. XIII, pp. 53-61].

Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica (Calcolo delle equipollenze [Annali delle Scienze, del Regno Lombardo-Veneto, t. V, (1835), pp. 244-259].

Metodo delle equipollenze [Ibidem, t. VII (1837), pp. 243-261; t. VIII (1838), pp. 85-131].

La memoria capitale è: *Sposizione del metodo delle equipollenze* [Mem. Soc. Italiana delle Scienze, s. I, t. XXV, p. 2ª (1855), pp. 225-309].

Nell'*Ausdehnungslehre* di GRASSMANN il vettore si presenta come speciale formazione geometrica di prima specie e viene indicato con *Strecke* [*Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse* (Ges. matem. u. physik. Werke, I_1, 1894); *Die Ausdehnungslehre von 1866* (Ibidem, I_2, 1896, p. 148)].

Le prime pubblicazioni di HAMILTON sui Quaternioni: *On Quaternions; or a new System of Imaginaries in Algebra*, dopo una nota preliminare del novembre 1843 alla Royal Irish Academy (Dublin) comparvero nei numeri di luglio, ottobre 1844 del Philosophical Magazine, Third Series, vol. XXV, pp. 10-13, 241-246, 489-495. Sono del 1853 le *Lectures on Quaternions* (Dublin); i due grossi volumi degli *Elements of Quaternions* furono editi nel 1866 dopo la morte dell'autore e poscia nuovamente nel 1899.

Il nome *vector*, da *vehere-trasportare* e che fa pensare al *veicolo* mediante il quale da un punto si passa ad un altro, fu proposto nel Quarterly Journal of Mathem. (Cambridge), p. 56.

La notazione più antica è AB e fu usata dal Bellavitis che presto (a. 1847, p. 248) fu costretto a cambiarla in $A - B$. Anche MÖBIUS: *Die Elemente d. Mechanik des Himmels* (1843) [Gesamm. Werke, Bd. IV, pp. 19-21] segue la notazione AB; peraltro dalla notazione dei baricentri risulta, al limite, $B - A$ e non AB. GRASSMANN (Werke, I_1, pp. 165, 303) giunge alla notazione $B - A$.

HAMILTON scrive $B - A$ e AB; ma usa di preferenza la prima e poi abbandona entrambe le notazioni per indicare un vettore con una sola lettera.

La notazione AB non è d'accordo con la notazione semplice usata da Grassmann per le formazioni geometriche di 1ª specie, delle quali i vettori sono un caso particolare. Distrugge la analogia con il calcolo algebrico, cioè è *contraria* all'utile *principio di permanenza*. Infine nel sistema completo di calcolo geometrico grassmanniano si confonde con il *prodotto alternato*.

HAMILTON, TAIT, GIBBS nelle sue prime lezioni: *Elements of vector Analysis, arranged for the use of students in Phisics*, Ne-Haven, 1881-84 [The Scientific Papers of J. Willard Gibbs, v. 2, pp. 17-90, New-York, 1906] indicano sistematicamente un vettore con una lettera greca maiuscola.

MAXWELL: *A Treatise on Electricity and Magnetism* [1ª ediz. 1873; 2ª ediz. 1881 (tradotta in francese, 1885); 3ª ediz. 1892]; LORENTZ H. A. [*Encyklopädie*, u. s. w. V, 13, 14] impiegano una lettera gotica maiuscola.

HEAVISIDE prima: Philosoph. Magazine; 5 series, v. XXII, august 1886, p. 123; *Electromagnetic Theory*, v. I, pp. 1891-93; poi GIBBS nelle lezioni edite nel 1902 a cura del Wilson: *Vector Analysis*... founded upon the Lectures of J. W. Gibbs, by. E. B. Wilson, New-York, 1902; impiegano le lettere maiuscole o minuscole grassette latine (Tipi di CLARENDON). FÖPPL ed ABRAHAM, e molti autori tedeschi adottano gli stessi tipi sostituendo alle latine le gotiche: *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität* (1ª ediz. 1894, 2ª ediz. 1904). Altri autori p. es. KLEIN u. SOMMERFELD, *Theorie des Kreisels*; Leipzig, 1898; FEHR, *Application de la methode vectorielle de Grassmann à la Geometrie infinitesimale*, Paris, 1899; non fanno convenzioni speciali.

Giova osservare che una *convenzione fissa* relativa alla specie dei

segni, semplici o composti, atti a indicare i vari enti di una classe (ad es., dei *vettori*) *non è logicamente possibile.*

Perchè alcuni autori fanno questa convenzione: « *un vettore si indicherà con una lettera latina minuscola con un tratto sopra* »? Perchè l'A. possa risparmiarsi di stabilire volta per volta il preciso significato dei segni speciali di cui fa uso, e perchè il lettore, visto anche isolato, il segno a possa affermare « a è un vettore ». Ciò posto la convenzione fissa è duplice: esplicitamente essa dice « i vettori si indicheranno con i segni a, b..... », implicitamente essa afferma che « ogni segno a, b,..... indica un vettore ». Dunque « *ogni simbolo diverso da* a, b....., *se indica un ente, questo* ***non è un vettore*** ». — In conseguenza: non si potrà porre $B - A = a$ perchè $B - A$ non è lettera latina minuscola con tratto sopra; $a + b$, ma, $a \wedge b$ saranno *definiti* come vettori, ma la convenzione fissa dirà che *non sono vettori*; ecc.

E se si riduce la convenzione a quest'altra « *un vettore sarà indicato con un segno, lettera o altro, con un tratto sopra* », allora in luogo delle notazioni

$$B - A,\ a + b,\ ma,\ a \wedge b,$$

dovremo scrivere, per indicare propriamente dei vettori,

$$B - A,\ a + b,\ ma,\ a \wedge b.$$

E tutto ciò senza pregiudizio della particolare sconvenienza tipografica e della assoluta inutilità del tratto sopra.

Analoghe osservazioni per qualsiasi legge che abbia il carattere *assoluto e generale* che si dà, di solito, alle convenzioni fisse.

Hamilton indica con Ta, *tensore di* $\boldsymbol{a}$, la lunghezza del vettore $\boldsymbol{a}$. Questa notazione segue le leggi ordinarie delle funzioni algebriche e può essere adottata, insieme col criterio generale, assai utile per la facile lettura delle formule, di *stampare in* **carattere diritto** *le lettere che rappresentano simboli (fissi) di funzione e* (secondo l'uso comune) *in* **carattere italico** (**inclinato**) *quelle che indicano gli enti soggetti al calcolo.*

Grassmann fa uso della notazione $\sqrt{a^2}$ che risulta dal prodotto interno; ed è poco conveniente.

Bellavitis indica indifferentemente con AB il vettore e la sua lunghezza e i possibili equivoci restano quasi sempre eliminati dal segno $\frown$ (simbolo astronomico della libra). Con l'uso, perfettamente logico e conveniente, del segno $=$, la convenzione di Bellavitis porterebbe a notevoli errori, e del resto è, in generale, inammissibile che *un solo segno possa rappresentare due enti distinti.*

Altri autori moderni: p. es. R. Gans: *Einführung in die Vektoranalysis*; Leipzig, 1906, indica la lunghezza del vettore $\boldsymbol{a}$ con la notazione $|\boldsymbol{a}|$ di Weierstrass; la quale crediamo sia da escludere, nel

calcolo vettoriale almeno. Intanto è da osservare che $\boldsymbol{a}$ è una funzione di $\boldsymbol{a}$, il cui simbolo, , *viene scritto parte a destra e parte a sinistra della lettera cui si applica*, contrariamente alle ordinarie leggi dei simboli di funzione, sen, log, !, ecc. ciascuno dei quali vien scritto tutto da una stessa parte della lettera cui si applica. Inoltre in una formula in cui compariscono le lunghezze di due o più vettori, p. es. nel prodotto interno di $\boldsymbol{a}$ per $\boldsymbol{b}$, tale segno genera confusione. Infine nel calcolo di GRASSMANN si confonde facilmente col segno , *indice*, che preposto a un vettore o bivettore, produce un bivettore o un vettore.

La notazione adottata è di ARGAND e di CAUCHY. Anche SARRAU (in una appendice al Treatise di MAXWELL, t. II, p. 595; Paris, 1889) usa per i vettori il nome « modulo » perchè « *déja usité pour représenter la quantité analogue dans la théorie des imaginaires.*

b) GRASSMANN è il primo che ha considerato il prodotto interno come risultato di operazione diretta tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, chiamandolo prodotto interno (innere Produkt) e lo ha indicato con $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$: *Die lin. Ausdeh.*, 1844 (Ges. W., I_1, p. XI); *Geometrische Analyse*, 1846 (Ibid., p. 345). Poscia nella *Ausdeh.* 1862 (Ibid. I_2, p. 112) e nella memoria: *Die Mechanik nach den Princ. der Ausdeh.* [Math. Ann. B. XII (1877), *Ges.* W., II_2, p. 48] ha adottato la notazione più complicata [$\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$], seguita recentemente dal sig. JAHNKE: *Vorl. ü. Vektorenrechnung* (Leipzig, 1905); e in parte dal PEANO che un po' più semplicemente scrive $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$, *Calcolo geometrico* (Torino, 1888) p. 104. La notazione primitiva di GRASSMANN fu adottata da RESAL: *Traité de cinématique pure*; Paris, 1862 da SOMOFF, e da molti autori moderni.

GIBBS considera lo stesso numero come risultato di operazione diretta tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e lo chiama *prodotto diretto*, in opposizione a *prodotto gobbo*, e lo indica con $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, che legge $\boldsymbol{a}$ *punto* $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ *dot* $\boldsymbol{b}$). Nel suo libro poi lo chiama costantemente *prodotto scalare*. Il punto avendo l'ufficio costante di separare due periodi o diverse parti di una formula, onde evitare il soverchio uso di parentesi, parrebbe conveniente abbandonarlo e scrivere semplicemente $\boldsymbol{ab}$; ma tale notazione è da serbarsi al prodotto alternato (Cfr. nostra Nota V già citata).

Nè sono convenienti le notazioni desunte dal calcolo dei quaternioni (Vedi i nostri articoli già citati); e le altre $(\boldsymbol{ab})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. La notazione adottata nel testo, che è la primitiva di GRASSMANN, è assai opportuna perchè il segno $\times$ ha tutte le proprietà dello stesso segno in algebra (ove è quasi sempre sottinteso) nei prodotti di due fattori.

c) GRASSMANN [*Ausdehnung.*, 1866 (Gesam. Wer. I_2, p. 211-213)] considera il prodotto vettoriale come *complemento* (Ergänzung) del prodotto alternato di $\boldsymbol{a}$ per $\boldsymbol{b}$ e lo indica con $(\boldsymbol{ab})$; lo considera cioè come funzione di un ente (bivettore) che noi non abbiamo considerato nel testo ma che per ulteriori sviluppi è ente necessario (Cfr. la nostra Nota V nei Rendiconti Palermo citata appresso). È stata questa la notazione seguita in Italia dal PEANO e da noi in lavori precedenti.

Per HAMILTON il prodotto vettoriale è la parte vettoriale del prodotto quaternionale di due quaternioni retti, e, con notazione ridotta, si indica con Vab. Per questa notazione si confrontino gli articoli scritti « *Per l' unificazione delle notazioni vettoriali* » [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo: XXIII, 324-328; XXIV, 65-80, 318-332; XXV, 352-375; XXVI, 369-377] e precisamente la nota III^a.

La maggior parte degli autori usano la locuzione « prodotto vettoriale » e lo indicano con Vab; per esemp. HEAVISIDE, FERRARIS: *Teoria geometrica dei campi vettoriali* [Mem. R. Acc. di Torino, s. II, t. XLVII, pp. 259-338 (1897); Opere complete, v. I, p. 389]; con $[a \cdot c]$ come LORENTZ e quasi tutti gli autori tedeschi; alcuni mettono una virgola in luogo del punto, o non metton nulla. Con quest' ultima notazione, che non segue le *leggi generali* delle funzioni, una sola differenza di forma nelle parentesi fa distinguere il prodotto vettoriale da quello interno. È quindi assai difettosa; tanto più che in algebra la *forma* delle parentesi è *accidentale*, secondo cioè gli aggruppamenti, e mai elemento *necessario* di notazione.

GIBBS, nelle sue lezioni dell' 81, è stato il primo, crediamo, a considerare $a \wedge b$ come risultato di *operazione diretta* tra a e b. Egli chiama il prodotto vettoriale *prodotto gobbo* (skew product) di a per b; ma poi adopera sempre la locuzione di prodotto vettoriale che indica con $a \times b$ e legge: a *croce* b (a *cross* b). È invece questa la notazione che noi adottiamo, seguendo GRASSMANN, pel prodotto interno.

Notiamo poi che la frase « a vettore b » ricorda che $a \wedge b$ è un vettore. La notazione $a \wedge b$ si può anche leggere « a esterno b », volendo con ciò indicare che il vettore $a \wedge b$ è esterno al piano dei due vettori, per quanto GRASSMANN chiami prodotto esterno quello che oggi comunemente si chiama prodotto alternato.

2. Origine, notazioni di gradiente, divergenza, rotazione.

a) Il vettore gradiente, considerato anzitutto da HAMILTON che fece uso dell'operatore ∇, *nabla* (*Elements of Quat.* I, p. 548) fu chiamato da MAXWELL prima *slope* (declivio) in « *The Scientific Papers of* J. CLERK MAXWELL » (Cambridge, 1890), v. II, pp. 257-266; e poi, *gradiente* nella 2^a edizione del *Treatise on Electricity and Magnetism*, di cui abbiamo potuto consultare solamente la traduzione francese di G. SÉLIGMANN-LUI, t. I, p. 17 (Paris, 1885-1889). In RIEMANN-WEBER, (*Partielle Differentialgleichungen* u. s. w., 4^a ediz. 1900) comparisce la notazione grad ora quasi universalmente accettata.

Nella notazione di HEAVISIDE e GIBBS, ∇u, il ∇ è un operatore diverso dal *nabla* hamiltoniano. Vedi le nostre note citate. È adottata da FÖPPL, ABRAHAM, JAHNKE, FERRARIS e si legge: *del u*.

La (1) [4] è data da HAMILTON, luogo citato; in casi particolari, v. II, p. 433, è data pure la (3); in generale da PEANO, *Applicazioni geometriche*, pagg. 131 e 134. La (4), insieme a molte altre, trovasi in TAIT: *Traité élémentaire des Quaternions* (edizioni 1867; 1874 tradotta in tedesco da SCHERFF, 1880; trad. in francese da G. PLARR, 1882-1884) v. II, p. 235. La (6), poco nota ma utilissima, è data da PEANO, *Formulario Matematico*, ediz. 1903, pag. 306, formula 19, ed anche *Applicazioni geometriche*, pag. 150.

b) Il nome *divergenza* è di CLIFFORD, *Elements of Dynamic*: Part. I, *Kinematic* (London, 1878), pag. 209. Con la notazione hamiltoniana viene indicato con $-S\nabla u$. Il numero $S\nabla u$ è chiamato *compressione cubica* da TAIT (l. c. II, pag. 122) e *convergenza* da MAXWELL. HEAVISIDE si vale della notazione div e di altre poco seguite. La notazione hamiltoniana di rot u è $V\nabla u$. MAXWELL usò prima la parola: *curl* (riccio, anello) o *version* e poi *rotazione*. La notazione rot u è adoperata quasi contemporaneamente da LORENTZ [*Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen* (Leiden, 1895)] e da FERRARIS l. c.

FERRARIS è uno dei pochi che cerchi definire in modo autonomo la rot poggiandosi sul teorema di STOKES; così fa pure, con procedimento analitico comune a molti autori, il GANS [*Einführung in die Vektoranalyse mit Anwendungen auf die mathematische Physik*; Leipzig, 1905, p. 835]. HEAVISIDE [*Electr. Theory* I, p. 191], FÖPPL ed ABRAHAM scrivono cur u. È stata anche proposta, ma non seguita la notazione quirl u. (WIECHERT), oppure vort u (VOIGT).

GIBBS scrive rispettivamente $\nabla \cdot u$ e $\nabla \times u$ che legge « *del dot u* *del cross u* » (coi nostri simboli $\nabla \times u$, $\nabla \wedge u$) per la divergenza e la rotazione; il ∇ figura come vettore simbolico, ma non ne ha le proprietà rispetto alle operazioni $\times$, $\wedge$.

[4]) Cfr. n. 2 del Cap. VI, Parte I.

BIBLIOGRAFIA

NUOVE NOTAZIONI E OMOGRAFIE

Questa bibliografia fa seguito alla « Bibliographie, notations nouvelles et Homographies » dei volumi I, II, IV di *Analyse vectorielle générale* (Lattes, Torino) già citata.

140. Berzolari L. — *Geometria analitica*. I (2ª edizione), Milano, Hoepli, 1920; Appendice.

141. Boggio T. — *Resistenza effettiva e resistenza ohmica* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 24 (2° sem. 1915), 6-12].

142. Id. — *Sulla formula fondamentale della Cinematica dei sistemi rigidi* [Atti Istit. Veneto, t. 74 (1914-1915), 1795-1799].

143. Id. — *Geometria assoluta degli spazi curvi* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 28 (1° sem. 1919), 58-62, 169-174].

144. Id. — *Sulla geometria assoluta degli spazi curvi* [Atti R. Acc. Torino, v. 54 (1919), 186-200].

145. Id. — *Calcolo differenziale con applicazioni geometriche*, vol. I [Collezione Lattes, 1921].

146. Bottasso M. — *Sulla flessione delle superficie inestendibili* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 24 (2° sem. 1915), 174-182].

147. Id. — *Teoremi su massimi e minimi geometrici e su normali a curve e superficie* [Atti R. Acc. Torino, v. 51 (1916), 844-867].

148. Id. — *Sulle trasformazioni assintotiche delle curve* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 26 (2° sem. 1917), 227-232].

149. Id. — *Alcune formule sulle superficie applicabili* [Ibid., v. 27 (2° sem. 1918), 17-22].

150. Id. — *Problemi sulla determinazione delle linee sghembe* [Scritti mat. offerti ad Enrico d'Ovidio. Torino, Bocca, 1918; 279-304].

151. Id. — *Generalizzazione della trasformazione di Combescure per le curve* [Atti R. Acc. Torino, v. 53 (1917-1918), 409-422].

152. Burali-Forti C. — *Nuove applicazioni degli operatori* [Atti R. Acc. Torino, v. 50 (1915)].

153. Id. — *Sulle derivate delle isomerie vettoriali* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 25 (1° sem. 1916), 709-716].

154. Burali-Forti C. — *Sugli operatori differenziali omografici* [Ibid., v. 26 (2° semestre 1916), 51-59].

155. Id. — *Sopra alcuni baricentri di linee, aree, volumi* [Rend. Istituto Lombardo, v. 49 (1916), 932-954].

156. Id. — *Sulla « curva di caccia »* [Atti Istit. Veneto, t. 75 (1915-1916), 1589-1597].

157. Id. — *Equivalenti omografiche delle formule di Frenet* [Atti R. Acc. Torino, v. 52 (1916-1917)].

158. Id. — *Alcuni sistemi di linee su di una superficie* [Ibid., v. 53 (1917-1918), 91-103].

159. Id. — *Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale* [Ibid., v. 53, 213-224].

160. Id. — *Sugli assintoti e piani assintotici di una linea* [Giornale di Matem., s. III, v. 7 (1916)].

161. Id. — *Alcune proprietà caratteristiche delle coniche* [Il Pitagora, anno 22, (1917)].

162. Id. — *I moti relativi nel calcolo assoluto* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 26 (1° sem. 1917), 632-637].

163. Id. — *Differenziali esatti* [Ibid., v. 27 (1° sem. 1918), 92-96].

164. Id. — *Alcune linee e superficie collegate con una linea gobba* [Ibid., 109-112].

165. Id. — *Sulle superficie rigate* [Ibid., 285-287].

166. Id. — *Rigate sviluppabili con assegnato cono direttore o con assegnata direttrice* [Atti Ist. Veneto, t. 77 (1917-1918), 303-316].

167. Id. — *Traiettorie ortogonali di un sistema ∞^1 di superficie sferiche* [Rend. Ist. Lombardo, v. 51 (1917-1918), 899-908].

168. Id. — *Sopra nuove operazioni e operatori per la Geometria del triangolo* [Il Pitagora, anno 24 (1918)].

169. Id. — *Fondamenti per la Geometria del triangolo.* Palermo, Capozzi, 1919.

170. Id. — *Soggetti di Studio* [Il Bollettino di Matem., anno 17 (1920), 47-50].

171. Id. e Boggio T. — *Meccanica razionale* [Collezione Lattes, 1921].

172. Id. e Marcolongo R. — *Corso di Matematica per gli Istituti tecnici*, vol. II *Geometria* [Napoli, F. Perella].

173. Burgatti P. — *Sulle discontinuità delle funzioni scalari e vettoriali e delle loro derivate nel passaggio attraverso una superficie* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 25 (2° sem. 1916), 311-316, 372-376].

174. Id. — *Il principio di Archimede nei mezzi solidi* [Rend. Acc. Bologna, 1915-1916].

175. Id. — *I teoremi del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie e loro applicazioni ai potenziali* [Mem. Acc. Bologna, s. 7, v. 4 (1916-1917)].

176. Id. — *Sopra un paradosso nella teoria del moto uniforme d'un solido immerso in un fluido perfetto* [Rend. Acc. Bologna (1916-1917].

177. Burgatti P. — *Sopra un teorema di Joukowski relativo alla forza sostentatrice nei corpi in moto traslatorio uniforme entro un fluido* [Ibid. (1917-1918)].

178. Id. — *Recensione dei Principi di Statica dei solidi elastici di G. Colonnetti* [Bollet. di Bibl. e Storia delle Scienze matem. anno 1918].

179. Id. — *La teoria del triedro mobile in rapporto all'analisi vettoriale* [Mem. Acc. Bologna, s. 7, v. 6 (1918-1919)].

180. Id. — *Lezioni di Meccanica razionale* [2ª ediz., Bologna, Zanichelli, 1919].

181. Id. — *Problemi ed esercizi di Meccanica razionale* [1ª ediz., Bologna, Zanichelli, 1921].

182. Id. — *Sopra una particolare soluzione delle equazioni di equilibrio dei solidi elastici* [Rend. Acc. Bologna, 1921].

183. Id. — *Il principio d'Archimede nei mezzi solidi* [Ibid.].

184. Caldonazzo B. — *Sulla meccanica delle superficie* [Il Monitore tecnico, anno XXVI (1920)].

185. Cisotti U. — *Risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann in campi prossimi a quelli classici* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 25 (1° sem. 1916), 413-417, 499-502, 579-581].

186. Id. — *Sui moti rigidi di una massa fluida limitata* [Ibid., 635-639].

187. Id. — *Sul moto di uno sferoide in un liquido indefinito* [Rend. Istit. Lombardo, v. 49 (1916), 603-612].

188. Id. — *Sulle azioni dinamiche di masse fluide continue* [Ibid., v. 50 (1917)].

189. Id. — *Una formula generale relativa a moti permanenti di liquidi pesanti e sue applicazioni* [Ibid., v. 51, (1918), 360-366].

190. Crudeli U. — *Sulla distribuzione della corrente elettrica in una lamina metallica immersa in un campo magnetico* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 26 (2° sem. 1917), 47-48].

191. Id. — *Le formule di Cauchy e i fluidi viscosi* [Ibid., v. 27 (2° semestre 1918), 49-50].

192. Da Rios Luigi S. — *Sulla dinamica dei fluidi comprimibili* [Rend. Ist. Lombardo, v. 52 (1919), 98-103].

193. Guglielmi A. — *Prodotto di due prodotti vettoriali misti ed applicazioni ai sistemi di equazioni* [Bollettino della « Mathesis »; anno XI (1919), 131-135].

194. Laura E. — *Sopra il metodo del sig. Eötvös per la determinazione della rotazione della terra* [Rend. Ist. Lombardo, v. 52 (1919), 259-267].

95. Lazzarino O. — *Sull'estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra ad un conduttore elettrico a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo sottoposto all'azione di un campo magnetico qualunque* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 26 (1° sem. 1917), 596-602].

196. LAZZARINO O. — *Rappresentazione cinematica della rotazione di un corpo nel quale esistono moti interni stazionari* [Ibid., v. 26 (2° sem. 1917), 109-114].

197. ID. — *Assi permanenti nel moto di rotazione di un corpo nel quale sussistono moti interni stazionari* [Ibid., 146-151].

198. ID. — *Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione nel quale sussistono moti interni variabili* [Ibid., 233-237].

199. ID. — *Sulla generalizzazione dei moti alla Poinsot e sulla stabilità degli assi permanenti di rotazione in detti moti* [Atti Acc. Torino, v. 54 (1918), 143-161].

200. ID. — *Sulla rotazione di un corpo nel caso di moti interni monociclici* [Rend. Istit. Lombardo, v. 52 (1919), 371-378].

201. ID. — *Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 28 (1° sem. 1919), 325-331, 341-346].

202. ID. — *Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici* [Ibid., v. 28 (2° sem. 1919), 9-14, 259-263, 329-333].

203. ID. — *Sul moto dei giroscopi asimmetrici pesanti nel caso in cui l'invariante principale S è costantemente nullo* [Ibid., 422-426, 489-493].

204. ID. — *Sulle equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 30 (1° sem. 1921), 13-16].

205. ID. — *Sulla variazione dell'energia cinetica di un sistema semirigido ruotante intorno ad un punto fisso quando sia nullo il momento rispetto a questo punto delle forze esterne* [Ibid., 113-116].

206. LEVI-CIVITA T. — *Sulla riduzione del problema dei tre corpi* [Atti Ist. Veneto, v. 74 (1914-1915), 907-939].

207. ID. — *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 24 (2° sem. 1915), 61-75].

208. ID. — *Forma mista di equazioni del moto, che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici* [Ibid., 235-248].

209. ID. — *Sul problema piano dei tre corpi. Caratteristiche cinetiche del sistema regolarizzatore: forza viva e quadrica reciproca* [Ibid., 421-433].

210. ID. — *Sul problema piano dei tre corpi. Forme esplicite (mista e canonica) delle equazioni regolarizzate* [Ibid., 485-501].

211. ID. — *Sopra due trasformazioni canoniche desunte dal moto parabolico* [Ibid., v. 25 (1° sem. 1916), 445-458].

212. ID. — *Sur la regularisation du problème des trois corps* [Acta mathem., 1920].

213. MAGGI G. A. — *Geometria del movimento*, 2ª edizione [Spoerri, Pisa, 1919].

214. Maggi G. A. — *Elementi di Statica* [Ibid. 1920].
215. Id. — *Dinamica dei sistemi*, 2ª ediz. [Ibid. 1921].
216. Id. — *Dinamica fisica*, 3ª ediz. [Ibid. 1921].
217. Marcolongo R. — *Sulla formula fondamentale della Cinematica dei sistemi rigidi* [Giornale di matem. v. 54 (1916) (7° della 3ª ser.), 137-140].
218. Id. — *Su alcuni operatori superficiali* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 26 (2° sem. 1917), 263-171].
219. Id. — *Meccanica razionale* 2ª edizione, vol. 1°. *Cinematica e Statica*, Manuali Hoepli, 1917. Vol. 2°. *Dinamica. Meccanica dei sistemi deformabili*, 1918.
220. Id. — *La teoria della relatività in senso stretto* [Rend. del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Univ. di Roma, v. V, (1920), 55-76].
221. Palomby A. — *Le formule fondamentali per la dinamica dei mezzi elastici isotropi* [Rend. Circolo mat. Palermo, t. 40 (2° sem. 1913), 71-102].
222. Pensa A. — *Su alcune omografie speciali e sugli operatori omografici C, R* [Atti Acc. Torino, v. 53 (1917), 22-36].
223. Id. — *Sull'operatore omografico R'* [Ibid., 81-93].
224. Id. — *Generalizzazione di una trasformazione di D'Ocagne* [Scritti matem. offerti ad Enrico d'Ovidio, Torino, Bocca, 1918].
225. Id. — *Una espressione differenziale vettoriale alternata* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 27 (1° sem. 1918), 113-117].
226. Id. — *Geometria assoluta dei vettori e delle omografie vettoriali in un S euclideo* [Rend. Ist. Lombardo, v. 52 (1919), 439-453].
227. Id. — *Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un S euclideo* [Atti Ist. Veneto, t. 79 (1919-20), 275-292, 737-761].
228. Id. — *Osservazioni sui concetti fondamentali e sulle notazioni regolari dei vettori* [Bollettino di Matematica, (1920-1921).
229. Poor V. C. — *Transformation Theorems in the Theory of the Linear Vector Function* [Bull. American Mathem. Society, s. 2, v. 22 (1916), 174-181].
230. Id. — *Operators in Vector Analysis* [Ibid, 503-504].
231. Ricci C. L. — *Sull'azione dinamica di una corrente fluida sopra pareti rigide* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 24 (1° sem. 1915), 1099-1101].
232. Serini R. — *Deformazioni longitudinali e trasversali di un corpo elastico omogeneo isotropo* [Rend. Ist. Lombardo, v. 51 (1918), 177-184, 341-349; v. 52 (1919), 409-416].
233. Sibirani F. — *Sopra alcuni sistemi di equazioni vettoriali* [Rend. Istit. Lombardo, v. 48 (1915), 919-946].
234. Id. — *Riassunto-formulario di Geometria analitica, Algebra, Calcolo infinitesimale, Calcolo vettoriale e Meccanica razionale* [Atheneum, Roma, 1915].

235. Sibirani F. — *Sulle radiali delle curve gobbe* [Ibid., v. 51 (1918), 119-133].

236. Id. — *Sulle superficie che si deducono da una data attribuendo ad un sistema ∞^1 di curve di questa traslazioni che siano funzioni continue di un parametro* [Ibid., v. 52 (1919-20), 712-722].

237. Id. — *Sulle superficie che contengono un sistema ∞^1 di curve prefissate* [Rend. Circolo mat. Palermo, t. 43 (1918-1919), 138-154].

238. Id. — *Sopra due classi di curve gobbe* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 28 (2° sem. 1919), 26-30].

239. Signorini A. — *Un teorema di confronto in balistica esterna ed alcune sue applicazioni* [Rend. Circolo mat. Palermo, t. 43 (1918-1919), 357-393].

240. Silla L. — *Sopra i moti di precessione regolare del giroscopio simmetrico pesante* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 28 (2° sem. 1919), 271-276].

241. Tedone O. — *Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell* [Rend. Acc. Lincei, s. V, v. 25 (1° sem. 1916), 563-576].

242. Id. — *Sulla maniera di stabilire le formule fondamentali dell' ordinaria teoria della diffrazione* [Ibid., v. 27 (1° sem. 1918), 351-370].

243. Viglezio E. — *Aree di curve piane* [Atti Acc. Torino, v. 56 (1921)].

244. Vivanti G. — *Lezioni di Analisi infinitesimale*, 2ª edizione. Torino, Lattes, 1920.

245. Id. — *Esercizi di Analisi infinitesimale*, 2ª edizione. Torino, Lattes, 1920.

246. Zappa R. — *I potenziali dell' elasticità e i due problemi fondamentali dell' equilibrio elastico* [Giornale di Matem., t. 57 (10° della 3ª serie), 1919, 193-216].

Finito di stampare
il giorno 27 Settembre 1921
nella Cooperativa Tipografica Azzoguidi
in Bologna

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
261
B86
1921

Burali-Forti, Cesare
Elementi di calcolo
vettoriale

P&ASci